Robert Kast

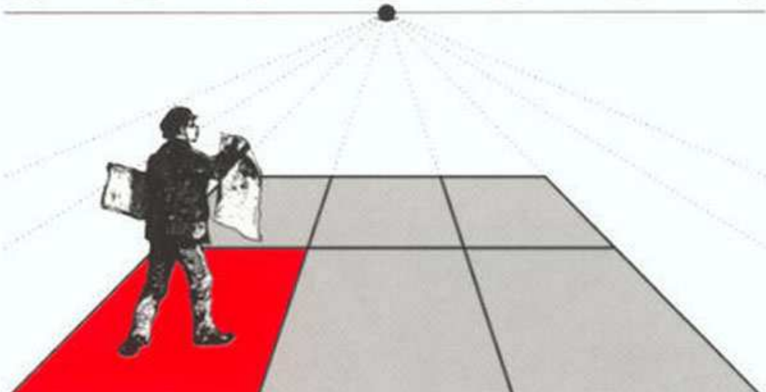
La théorie de la décision

Nouvelle édition

« Les principaux aspects sont pédagogiquement présentés. »

PROJET

R E P È R E S



LA DECOUVERTE

Robert Kast

La théorie de la décision

Nouvelle édition

Éditions La Découverte
9 *bis*, rue Abel-Hovelacque
75013 Paris

DU MÊME AUTEUR

Rationalité et marchés financiers, collection « Gestion », Economica, Paris, 1991.
Fondements microéconomiques de la théorie des marchés financiers (avec André LAPIED), collection « Gestion », Economica, Paris, 1992.

Catalogage Électre-Bibliographie (avant publication)

KAST, Robert
La théorie de la décision. – Nouv. éd. – Paris : La Découverte, 2002. – (Repères ; 120)
ISBN 2-7071-3769-3

Rameau :	calcul économique incertitude (économie politique)
Dewey :	330.1 : Économie générale. Théorie générale de l'économie
Public concerné :	1er et 2e cycles. Public motivé

Introduction

Pourquoi élaborer une théorie pour prendre des décisions ? Quels décideurs ressentent-ils la nécessité d'une théorie ? Nous prenons des décisions à chaque instant sans que cela ne nous pose de problème. Souvent, pourtant, nous rencontrons des situations où les conséquences de nos choix méritent réflexion, où nous éprouvons le besoin d'analyser, de rationaliser et, si cela est possible, de nous faire aider. Lorsque tel est le cas, nous devenons un décideur, nous pouvons éprouver le besoin de justifier nos choix, voire être fortement invités à le faire par ceux devant lesquels nous sommes responsables. Une théorie sur laquelle peuvent se fonder les choix — une théorie de la décision — répond à ce besoin : elle permet de rationaliser les décisions.

La difficulté de justifier ses choix n'est pas la seule que peut rencontrer un décideur. Même dans le cas où la décision ne concerne que lui-même, le décideur peut ne pas savoir comment « prendre » le problème, c'est-à-dire comment l'analyser, décrire les décisions alternatives et leurs conséquences, mesurer la portée de ses actes… C'est aussi pour tenter de répondre à ces questions que la théorie de la décision s'est développée.

Les différents aspects de la description et de la résolution de problèmes de décision que nous introduisons dans cet ouvrage ont pris forme durant la seconde moitié du XXe siècle et constituent la *théorie de la décision*.

Cette théorie résulte de plusieurs siècles de recherches sur la formalisation du hasard et sur l'étude des jeux de société, sur l'analyse des problèmes économiques et politiques, et, plus récemment, sur les problèmes de gestion, mais aussi sur les fondements psychologiques de la représentation du comportement.

Un des objectifs principaux du développement de cette théorie est de trouver un cadre de référence pour les théories économiques et les modèles de gestion des entreprises, publiques ou privées. Comment décrire le comportement d'agents économiques ? Quelle décision prendre dans le cadre d'une gestion rationnelle des ressources et des moyens de production ? Comment investir dans des actifs financiers dont les rendements sont incertains ? Comment inférer des paramètres d'une distribution de probabilités à partir d'un échantillon ? Ces problèmes de décision ont motivé le développement de la théorie présentée dans cet ouvrage.

Confrontés à un problème de décision, nous commençons par en extraire quelques grandes lignes, simplifiant pour y voir clair, tout en gardant la faculté de revenir sur les simplifications lorsque nous voyons qu'elles restreignent notre analyse. La théorie ne procède pas autrement.

La formalisation d'un problème de décision, c'est-à-dire la description de ses éléments par des valeurs, des fonctions, des graphes, correspond à une simplification qui permet d'utiliser des outils et des résultats mathématiques. Nous présentons aux chapitres II et III un certain nombre d'exemples de problèmes de décision pour mieux comprendre comment les formaliser.

Cette formalisation faite, la prise de décision proprement dite utilisera un ou plusieurs critères. Les plus couramment utilisés sont présentés au chapitre IV. Historiquement, ces critères ont été trouvés de manière pragmatique, en statistique et en calcul économique notamment. Nombreux sont ceux qui n'ont toujours pas trouvé de théorie qui en justifie l'usage. C'est pourquoi la théorie de l'utilité espérée mérite d'être présentée en détail (chapitre V) comme le premier exemple achevé d'une théorie de la représentation du comportement de décideurs face au risque. Cette théorie a permis d'élaborer des analyses de l'aversion pour le risque et des mesures du risque (chapitre VI).

D'autres théories, complémentaires, concurrentes ou plus générales, ont été développées (chapitre VIII). C'est surtout depuis 1990 qu'il est possible de mieux voir les liens entre ces différentes théories dont les applications font l'objet de recherches actives.

Ces théories utilisent des résultats de la théorie des probabilités qui permet de décrire et de quantifier des expériences aléatoires. Mais le calcul des probabilités nécessite des données qui sont tirées des observations (« la probabilité que le taux de change du dollar face à l'euro augmente dans les trois prochains mois » sera estimée à partir des fluctuations de ce taux observées par le passé). C'est l'objet de la statistique de nous donner les moyens d'extraire de tels paramètres des résultats observés. Le chapitre VII est consacré au problème de la décision statistique qui est à la fois un problème de décision et une application de la représentation de l'incertitude par la théorie des probabilités. Si la statistique fait partie de la mathématique au même titre que la théorie des probabilités, les critères qui y sont utilisés doivent reposer sur les théories de la représentation du comportement face à l'incertitude. À partir d'observations de variables considérées comme aléatoires, le statisticien infère des valeurs caractéristiques (comme la moyenne) des lois de probabilités qui régissent ces observations. Par exemple, à partir d'un échantillon de votants pris au hasard, on estime le nombre moyen des intentions de vote pour un candidat. Cette inférence est une décision, elle dépend de la méthode et du critère utilisés par le statisticien, critères que la théorie de la décision pourra lui permettre de justifier (auprès de ses commanditaires, notamment).

L'étude des jeux a été le point de départ de la théorie des probabilités, donc, en partie, de la statistique, de la théorie de la décision individuelle, et, bien sûr, de la théorie des jeux. Cette dernière a connu un essor considérable depuis l'ouvrage de von Neumann et Morgenstern en 1944, formant ainsi une théorie en tant que telle ; elle est une branche des mathématiques appliquées. Bien que la théorie de l'utilité espérée ait été developpée précisément pour cela, la représentation du comportement individuel a joué un rôle assez restreint en théorie des jeux jusqu'aux années quatre-vingt où l'étude de la rationalité dans les jeux lui a donné une nouvelle place. Nous ne ferons qu'évoquer dans la conclusion cette théorie qui peut pourtant être considérée comme faisant partie de la théorie de la décision puisqu'elle s'intéresse aux comportements stratégiques des décideurs face à d'autres décideurs. L'ampleur, la portée et les applications des résultats de la théorie des jeux dépassent largement les objectifs de cet ouvrage qui se consacre à l'aspect individuel des décisions. L'aspect stratégique, parce qu'il fait prendre en compte par chaque décideur les décisions des autres, fait appel à des notions de solutions de problèmes, de conflits, ou à des concepts d'équilibre, il ne concerne pas les problèmes de décision individuels proprement dits, ceux qui font l'objet de la théorie abordée ici.

La théorie de la décision se trouve à l'intersection de nombreuses disciplines : économie, gestion, psychologie, statistique et mathématique. L'intérêt des mathématiciens pour la formalisation de l'incertitude et de la solution des jeux a été déterminant pour l'émergence de cette théorie et des outils qu'elle utilise. Un aperçu de l'histoire de la théorie est tracé dans le premier chapitre. Mais le besoin d'une théorie du comportement rationnel pour les modèles de l'économie et de la gestion a été la raison de son succès et des développements qui continuent à voir le jour. Cette perspective est mise en valeur dans le premier chapitre et guide la progression des chapitres ultérieurs.

I / Rationalité des choix : perspectives et origines de la théorie

Faire un choix rationnel ! Beaucoup de décideurs le souhaitent et y travaillent. Dans les problèmes d'investissement, d'écologie, de sécurité routière et, plus généralement, dans les problèmes de choix industriels ou politiques dont les conséquences concernent la société, le choix final voudrait être fondé sur des arguments à caractère scientifique : il voudrait être rationnel.

La théorie de la décision se fonde sur un ensemble de descriptions des problèmes de décision à partir desquelles des analyses cohérentes peuvent être menées ; elle propose des principes sur lesquels des critères de sélection sont construits et des solutions seront proposées. La théorie donne donc les moyens aux décideurs non seulement d'analyser leurs problèmes, mais aussi de pouvoir justifier les solutions proposées : elles sont rationnelles. La description des problèmes de décision utilise le « langage » mathématique parce que c'est un langage universel, d'une part, et, d'autre part, parce qu'il permet d'utiliser de puissants outils d'analyse. Cela ne veut pas dire que le champ d'application soit strictement limité à des problèmes quantitatifs, la mathématique ne ramène pas tout aux nombres ! Il est certain toutefois que, dans la pratique, les décisions proposées par la théorie seront généralement quantifiées.

Les décisions économiques, qui sont par nature quantifiées, seront naturellement fondées sur une analyse et sur des méthodes quantitatives. La difficulté rencontrée dès l'abord vient de ce que certains éléments de l'environnement économique ne sont pas tous aisément quantifiables : les impondérables météorologiques (qui influent sur les récoltes), les contextes géopolitiques (blocus, guerres) et surtout les comportements des différents acteurs économiques. Cela ne doit pas nécessairement faire abandonner l'approche quantitative sous le prétexte que toute quantification serait réductrice et partiellement arbitraire. Un des objets de la théorie de la décision est de donner les moyens de construire des descriptions quantifiées des problèmes, ainsi que des critères, qui permettent d'y apporter des solutions. Bien entendu, le calcul du prix de vente d'un robot ménager, à partir des coûts de production et d'une estimation de la demande de ce produit, se prête mieux à une étude quantitative que le choix d'un nouveau directeur commercial. Cependant, avec un degré approprié de formalisme, en restant conscient des limites de validité des critères, en examinant de manière critique les solutions proposées, il est souvent profitable d'utiliser les méthodes développées par la théorie de la décision, avant d'arrêter le choix final.

1. Quelles théories de la décision ?

Ou encore, la théorie de quelles décisions ? Le besoin de rationaliser les choix se fait sentir aussi bien pour les gestionnaires qui traitent de problèmes complexes, mais sans incertitude, que pour ceux, les actuaires et les financiers notamment, dont le souci principal vient de l'incertitude sur les conséquences de leurs choix. Doit-on traiter séparément chaque type de problème et lui proposer une théorie adaptée ? La théorie de la décision se construit de manière à pouvoir intégrer différents types d'incertitude, et nous aurons donc une théorie qui pourra s'appliquer à des problèmes de décision qui se posent à des agents situés dans des environnements de natures variées. Mais outre les utilisateurs directs des recommandations d'une théorie, la rationalisation des choix est un élément essentiel à la construction de nouvelles théories qui mettent en jeu des décideurs, dans les sciences de l'homme et de la société. La théorie économique est construite sur la description du comportement d'agents (consommateurs, producteurs) ; les modèles de la gestion doivent faire des hypothèses sur la représentation des objectifs à atteindre. Les situations suivantes font appel à la théorie de la décision ; elles aideront à en clarifier les différents aspects.

• *Les choix économiques* dans les entreprises, publiques et privées, ont commencé à être traités de manière systématiquement scientifique dans les années cinquante. Le calcul économique s'adresse en particulier aux problèmes de choix de facteurs de production en fonction de leurs coûts, de choix de prix de vente d'un produit, d'évaluation des salaires, etc. [1] Il a pu voir le jour grâce au développement de la théorie économique qui fournit un cadre approprié à la formalisation des problèmes, aux méthodes économétriques permettant de traiter les données et aux résultats de la « recherche opérationnelle » proposant des méthodes mathématiques de résolution.

Recherche opérationnelle

« Recherche opérationnelle » est une traduction mot à mot de l'américain *operations research*, terme militaire désignant un ensemble de recherches théoriques et de méthodes développées durant la Seconde Guerre mondiale dans les services scientifiques de l'US Navy, afin d'améliorer les stratégies militaires mais aussi la gestion des matériels de plus en plus sophistiqués des armées. L'application de ces méthodes aux stratégies commerciales et à la gestion des affaires, privées ou publiques, s'est imposée après la guerre aux responsables économiques. Parmi ces méthodes, les plus marquantes sont celles des programmes d'optimisation mathématique que le développement des ordinateurs a pu rendre particulièrement efficaces.

Grâce à la formalisation des problèmes économiques proposés par la théorie : fonctions de production, de coût, fonctions d'offre, de demande, etc., les problèmes de choix économiques ont pu être traités comme des problèmes d'optimisation mathématique, en particulier par les méthodes de programmation linéaire.

Mais les méthodes de la recherche opérationnelle concernaient aussi un approfondissement de l'analyse des décisions en distinguant les situations où toutes les conséquences sont connues de celles où elles ne le sont pas (situations d'incertitude, de risque, de conflit d'intérêts).

• *L'analyse des risques* est une étape nécessaire du traitement de certains problèmes de décision. Les problèmes d'assurance et de choix de portefeuille appartiennent à des domaines où l'incertitude est l'objet principal des préoccupa-

1. Voir, dans la même collection, B. WALLISER, *Le Calcul économique*. Bien qu'il s'inspire de la théorie de la décision individuelle, le calcul économique a pour objet le choix collectif qui ne relève pas de la même problématique que le choix individuel (voir chapitre IV, paragraphe 6).

tions des décideurs. Lorsque l'on veut assurer un bien contre un risque de destruction, deux éléments fondamentaux sont à estimer : la valeur du bien ou son coût de remplacement, d'une part, l'importance et la vraisemblance des événements qui présentent des risques, d'autre part. De même, pour décider de la formation d'un portefeuille, les rendements des actifs, mais aussi les variabilités de ces rendements, doivent être pris en compte.

C'est l'objet principal de la théorie de la décision individuelle que de proposer un cadre d'étude du comportement rationnel face à l'incertitude. En distinguant différents types d'incertitudes, des théories adaptées sont proposées pour représenter les comportements de décideurs qui vérifient certaines conditions. La théorie la plus achevée concerne les situations où l'incertitude porte sur des variables dont la distribution de probabilité est connue : une compagnie d'assurances a estimé que la probabilité de destruction d'une automobile durant l'année à venir est de 5 % ; le taux de rendement moyen d'un actif financier est estimé à 9 % avec une variabilité (mesurée par l'écart moyen autour de 9 %) de 15. Ces estimations sont faites sur la base d'observations des variables passées, éventuellement corrigées par des informations concernant le futur.

C'est à ce type d'incertitude qu'est généralement réservé le terme de *situations de risque*. La théorie qui a dominé les études de risques, depuis son apparition en 1944, est la *théorie de l'utilité espérée* (chapitre V). Elle a permis de définir un certain nombre de mesures du risque qui ont servi tant en théorie de l'assurance qu'en économie de l'incertain en général. Mais elle présente de graves limites qui ont conduit à chercher d'autres théories dont l'émergence date des années quatre-vingt et qui n'ont pas encore trouvé toutes les applications que l'on peut en attendre.

Les théories du risque s'étendent à certaines situations où l'incertitude n'est pas probabilisée et où l'estimation des risques doit garder un caractère subjectif. C'est le cas de problèmes d'investissement dans une activité mal connue, de recherche de minerais dans une région non prospectée, et, d'une manière générale, de paris sur une variable aléatoire dont les réalisations ne peuvent pas être observées (comme les paris sportifs, par opposition aux loteries).

Les problèmes d'assurance font aussi intervenir, au point de vue individuel, un risque relatif aux comportements des assurés : l'assureur prend en compte la fréquence des accidents passés, mais il doit aussi prendre en compte le comportement (les précautions, les activités) de l'assuré. Ce dernier peut fort bien prendre beaucoup moins de précaution s'il est assuré que s'il ne l'était pas (ce problème est connu sous le nom de « risque moral »). Il peut aussi prétendre à un contrat qui ne correspond pas au type de risque que son activité lui fait courir (ce problème est connu sous le nom d'antisélection [2]). Dans tous les cas, du fait qu'il y a plusieurs parties dans un contrat, un élément de l'incertitude concernant chacune des parties provient du comportement des autres.

• L'étude des *situations de conflit d'intérêts* fut, on s'en doute au vu de son origine militaire, un des moteurs de la recherche opérationnelle. C'est l'objet de la *théorie des jeux*, qui doit son nom au fait que les jeux de société sont des microcosmes de situations de conflit réelles : les *échecs*, la guerre (féodale !) ; le *Monopoly*, l'investissement immobilier ; le *bridge*, la communication, le choix de stratégies et le combat. Avec ou sans coopération, en connaissance complète ou non des autres joueurs et de leurs objectifs, avec ou sans incertitude sur l'environnement du jeu, la théorie des jeux a formalisé un grand nombre de situations de conflit et s'est efforcée d'y apporter des solutions. Ses applications en théorie de l'assurance et de la concurrence sont les plus connues, mais ses apports sont importants aussi dans l'analyse des équilibres économiques et dans la formalisation de situations politiques et sociales (organisation industrielle, jeux de vote, négociations syndicales…). L'approche de la théorie des jeux diffère de celle de la théorie de la décision individuelle puisque son objet est de proposer des solutions à des problèmes où plusieurs décideurs interviennent. La théorie des jeux propose un ensemble de méthodes d'analyse et de concepts de solution pour lesquels chacun des joueurs tient compte de la réaction des autres joueurs à sa décision. Ces analyses utilisent la théorie de l'utilité espérée pour représenter le comportement des joueurs face aux risques, quand ceux-ci proviennent de mécanismes aléatoires. En revanche, l'incertitude à laquelle fait face chaque joueur quant aux décisions des autres joueurs n'est pas représentée comme une variable aléatoire. Chacun des joueurs, se

---

2. *Adverse selection*, en anglais.

mettant à la place de ses opposants, peut chercher à trouver une décision pour chacun qui soit telle qu'aucun ne puisse individuellement mieux faire si les autres ne dévient pas. Ce type de raisonnement ne peut se faire que sur la base d'une description du jeu qui soit une connaissance commune de tous les joueurs ; il suppose de plus que chacun des joueurs raisonne de la même manière et adopte un comportement rationnel.

La théorie de la décision regroupe donc un ensemble de méthodes d'analyse et de résolution de problèmes de décision. Cet ensemble peut parfois paraître hétéroclite du fait que les méthodes dépendent de l'environnement des problèmes traités. Ce qui en fait UNE théorie, c'est que ces différentes méthodes sont construites en utilisant la mathématique, non seulement pour son langage et sa logique, mais aussi pour sa construction : partant d'éléments de base (les décisions possibles, les préférences…), des axiomes sont proposés (sur le comportement des décideurs) à partir desquels la théorie est construite.

Bien que la théorie de la décision ait les mêmes origines que la représentation de l'incertitude, cette dernière a connu une formalisation plus universelle qui a donné lieu à la formation d'une théorie purement mathématique : la théorie des probabilités.

2. Aperçu historique de la représentation de l'incertitude

Le fait que les conséquences de nos actes ne dépendent pas uniquement de nos décisions a dû s'imposer très tôt à la conscience humaine. Avant toute analyse scientifique des phénomènes, les facteurs qui échappent au contrôle des décideurs ont été attribués à la volonté d'entités anthropomorphes : les dieux et les démons. Les langages magico-religieux peuvent être considérés comme les premières représentations de l'incertitude. Au fur et à mesure de l'avancée des analyses scientifiques, le rôle de la formalisation démonologique a reculé devant les théories et d'autres types de formalismes. L'invention des premiers jeux de société et leurs raffinements ont sans doute permis de distinguer le rôle de l'adresse, de la réflexion, des interactions entre les joueurs, et, enfin, d'isoler le rôle de variables qui ne sont contrôlées par aucun des joueurs. Ainsi, les jeux d'*échecs*, de *dames* ou le *go* ne laissent d'incertitude que quant à la stratégie choisie par l'autre joueur. En revanche, dans les jeux utilisant des dés ou des cartes, l'incertitude porte aussi sur des numéros ou des figures tirés au hasard. Les loteries, lotos ou jeux de roulette des casinos sont des jeux où les conséquences des choix (paris) des joueurs ne dépendent que des résultats du mécanisme utilisé, résultat qui est supposé ne pas être manipulé.

L'étude des jeux de société, considérés comme des formalisations de situations de décisions réelles, a été le point de départ (XVII^e^ et XVIII^e^ siècles) de la théorie de la décision, ainsi que celui d'une formalisation mathématique de l'incertitude, qui devait devenir la *théorie des probabilités*. Le véritable développement de cette théorie mathématique devait venir, au XIX^e^ siècle, des recherches en physique, d'une part, et de l'étude des statistiques sociales et économiques, d'autre part. La théorie des probabilités est désormais une branche de la mathématique ; la statistique mathématique en est un développement dans lequel les techniques statistiques trouvent leurs fondements. Aussi, autant que faire se peut, la théorie de la décision, telle qu'elle est apparue dans les années cinquante, se réfère à ces théories en utilisant leur formalisation de l'incertitude. Un petit exemple classique en théorie des probabilités peut aider à comprendre comment cette théorie et son formalisme peuvent aider à prendre des décisions.

Supposons que vous soyez dans une salle avec un certain nombre de personnes et qu'un individu vous aborde et parie avec vous cent euros qu'il y a dans cette salle au moins deux personnes ayant la même date d'anniversaire. Une fois sûr que l'individu ne connaît pas plus que vous les personnes présentes, tiendrez-vous le pari ? Cela dépend, bien sûr, du nombre de personnes dans la salle ; on ne doute pas qu'il y ait plus de chance de trouver deux personnes ayant la même date d'anniversaire parmi cent personnes que parmi cinq. Le calcul des probabilités permet de calculer précisément que la probabilité de trouver deux personnes ayant la même date d'anniversaire est de 0,0027 s'il y a deux personnes présentes ; de 0,11, si le nombre de personnes est 10 ; de 0,42, s'il y a 20 personnes ; de 0,50 (le pari est donc équivalent dans ce cas à un jeu de pile ou face !) si le nombre de personnes est 23 ; de 0,97, s'il y a 50 personnes (vous êtes quasiment sûr de perdre !).

Mais le fait qu'une théorie mathématique existe ne signifie pas que toutes les situations d'incertitude puissent s'exprimer selon le formalisme probabiliste [3]. En outre, pour chaque problème de décision, restent les difficultés d'interprétation du formalisme qui représente l'incertitude telle qu'elle est perçue par le décideur.

C'est en concurrence avec l'élaboration de théories économiques qu'ont été posés de nombreux problèmes d'interprétation de l'incertitude dans les problèmes de décision. En particulier, John Keynes [1921]* a favorisé une interprétation selon laquelle toutes les probabilités sont conditionnelles et définies par des relations ordinales entre les événements. Ramsey [1931], puis De Finetti [1930] et Savage [1954], en critiquant le point de vue fréquentiste (les probabilités des événements sont les fréquences de leurs apparitions dans une expérience aléatoire répétée), ont considéré les lois de probabilités comme des représentations des jugements des décideurs sur la confiance qu'ils accordent à la réalisation des événements. Une telle interprétation conduit à une notion de probabilités subjectives qui ne sont définies que dans le contexte de problèmes de décisions individuels. Les deux notions, fréquentistes et subjectivistes, peuvent cependant être juxtaposées (Anscombe, Aumann [1963]) : les probabilités « objectives » des événements d'une expérience aléatoire (loterie) pouvant être utilisées pour étalonner les probabilités « subjectives » d'événements dont l'apparition ne peut, ou n'a pas pu, être observée.

3. Les fondateurs de la théorie de la décision

En 1957, paraît un ouvrage qui reste à ce jour une très bonne référence des théoriciens de la décision : *Games and Decisions (Jeux et décisions)* de Luce et Raiffa [1957]. Le point y est fait sur l'état de l'art à cette époque et de nombreuses suggestions sur des extensions et des applications possibles y sont proposées. Si, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, la théorie de la décision s'est largement développée depuis, c'est sur les résultats présentés dans cet ouvrage que se sont

---

3. À ce propos, notons pour plaisanter que « certains casuistes ont abusé du système probabiliste et sont arrivés, par des déductions subtiles, à des conclusions que la morale réprouve ». « Probabilisme, doctrine théologique », *in Le Larousse pour tous* (2 vol.), Librairie Larousse, Paris, 1910.

* Les références entre crochets renvoient à la bibliographie en fin d'ouvrage.

appuyés à la fois et la plupart des recherches en économie de l'incertain, et la plupart des méthodes d'aide à la décision.

Comme l'indique le titre de l'ouvrage de Luce et Raiffa, il s'agit tout d'abord de présenter les résultats fondamentaux de la théorie des jeux alors toute récente, puisqu'elle a vu le jour sous sa forme moderne durant la Seconde Guerre mondiale (ses concepts de solution des problèmes de décision en situations de conflit devaient leur importance à l'actualité militaire). Mais la théorie des jeux elle-même requérait une théorie de la représentation du comportement individuel : c'est la théorie de l'utilité espérée proposée par von Neumann et Morgenstern [1944]. La notion d'utilité espérée (chapitre V) avait été proposée dès le XVIIIe siècle par Daniel Bernoulli ; elle n'avait pas été beaucoup exploitée depuis lors, essentiellement parce que les modèles économiques se limitaient au cadre de décisions sans incertitude. Elle n'était cependant pas étrangère à certains économistes qui utilisèrent la notion de fonction d'utilité des conséquences (au lieu de comparer les conséquences elles-mêmes) ainsi que la propriété de cette fonction d'être marginalement décroissante : la satisfaction s'accroît moins en ajoutant un euro à mille euros, qu'en ajoutant un euro à dix euros.

Parallèlement à la formalisation de la théorie des jeux, un certain nombre de techniques mathématiques (programmation linéaire et, plus généralement, techniques d'optimisation de critères) ont permis à la théorie de la décision d'être appliquée avec succès. Par ailleurs, la statistique, en devenant une théorie mathématique qui s'appuyait sur la théorie des probabilités, cherchait à faire reposer ses méthodes d'inférence sur une théorie : la décision statistique (chapitre VII). Ce furent Wald [1950], puis Savage [1954] qui firent le lien entre les fondements de la statistique, des probabilités et des décisions.

Historiquement, ces théories sont intimement liées. C'est au XVIIe siècle, puis au XVIIIe siècle que les philosophes-mathématiciens se penchèrent sur les problèmes posés par les jeux de hasard. Le chevalier de Méré (1607-1684), philosophe, homme de lettres et joueur invétéré, fut un des premiers à poser des problèmes de décision en termes scientifiques et à chercher à les résoudre dans le cadre simple des jeux de hasard. Un de ces problèmes consistait à faire parier contre l'apparition d'au moins un six en jetant quatre dés. Le chevalier de Méré réussit à calculer que sa probabilité de gagner au jeu précédent (la probabilité qu'apparaisse au moins un six) était légèrement supérieure à 1/2, ce qui lui donnait, en y jouant souvent, un avantage suffisant pour gagner à long terme sans que ses partenaires ne réalisent que le jeu leur était défavorable. C'est sur le même principe que sont construits les jeux proposés dans les casinos qui, tout en laissant aux joueurs une probabilité assez importante de gagner, assurent, à long terme, un revenu certain à la direction.

Le chevalier de Méré se posait des problèmes de décision d'une manière qui exprimait le besoin d'une théorie. Ainsi le problème des partis (on dirait aujourd'hui partages) résolu par Pascal : on considère un jeu de pile ou face, répété, à deux joueurs, où le premier joueur à avoir gagné N fois (N est un nombre fixé avant que la partie commence) ramasse la totalité de la mise initiale. Le problème est alors le suivant : supposons que le jeu soit interrompu et qu'il manque m parties pour que le joueur A gagne et n parties pour que le joueur B gagne, comment répartir la mise équitablement ?

La solution proposée par Pascal suppose que le partage est équitable si les sommes perçues par chacun des joueurs sont proportionnelles à leurs chances de gagner. Ce critère est l'« espérance du gain » ; il avait été défini par Huygens dans son essai, *De la logique du jeu de dés*, en 1637, avec l'interprétation du « juste prix auquel un joueur accepterait de céder sa place dans une partie ». L'utilisation de ce critère nécessitait de savoir calculer les « chances » ; ce furent les premiers calculs de probabilités. Problèmes de décision, jeux et calcul des probabilités restèrent très liés au siècle suivant : Montmort, *Essai d'analyse sur les jeux de hasard* (1708) ; de Moivre, *La Doctrine des chances* (1730) ; Jacques Bernoulli, *L'Art de la conjecture* (1713), qui trouva la première loi des grands nombres, et son neveu Daniel, *Exposé d'une théorie nouvelle de l'évaluation du risque* (1738). Daniel Bernoulli peut être considéré comme le père de la théorie de la décision moderne puisqu'il fut le premier à proposer le critère de l'« espérance de l'utilité du gain », sur lequel nous reviendrons en détail au chapitre v. Mais pour se développer plus avant, l'analyse des problèmes de décision avait besoin de mathématiques qui restaient à découvrir. La théorie des probabilités fut développée par Poisson (qui découvrit aussi une loi des grands nombres en 1837 et imposa ce terme), puis par Laplace (*Théorie analytique des probabilités*, 1812) et Gauss (*Théorie de la combinaison d'erreurs de faibles amplitudes*, 1821) qui découvrirent la fameuse loi de Laplace-Gauss, aussi appelée loi normale. Il fallut tout un siècle pour généraliser les lois des grands nombres, et pour cela le développement des théories de l'intégrale (Riemann en 1867, Lebesgue en 1901, pour les plus connues).

La théorie des probabilités prit sa forme achevée en 1933 (Kolmogorov, pour un fondement analytique, mais von Mises avait proposé un fondement statistique en 1919). Elle continue de se développer, mais dès cette époque ses applications aux statistiques (qui devaient aussi former une théorie mathématique), à la théorie des jeux et à la théorie de la décision allaient devenir la norme.

4. Les théories et les perspectives

La théorie de la décision individuelle est l'objet de notre présentation. Elle consiste, dans le cadre d'une description adéquate des différents éléments des problèmes de décision, à construire des critères fondés sur des hypothèses sur le comportement du décideur. Dans le cadre de ces hypothèses, le comportement rationnel consiste à optimiser ces critères. La théorie de la décision s'inscrit ainsi dans la perspective de la théorie économique qui met en jeu des agents, consommateurs et producteurs, et en formalise le comportement comme consistant à maximiser des « fonctions d'utilité » ou « fonctions de satisfaction » (nous simplifions, la théorie n'a souvent besoin que de « préférences » — chapitre III — sans que celles-ci doivent être représentées par une fonction). L'agent économique est alors réduit au fameux *Homo economicus* qui peut faire sourire, mais qui a permis d'importantes avancées dans le domaine de la compréhension des prix d'équilibre.

Dans des domaines plus spécialisés de l'économie : marchés financiers, contrats d'assurance et, plus généralement, ceux traitant de l'analyse des risques, la théorie de la décision a permis de proposer des solutions normatives, en s'appuyant notamment sur le critère de l'utilité espérée.

Dans les applications, ces théories requièrent le traitement de données, ce qui relève de la statistique. Mais ce traitement nécessite aussi des prises de décisions et l'inférence statistique se réfère aussi à la théorie de la décision.

L'étude de la plupart des décisions économiques ne peut se traiter sur la seule base du comportement individuel puisque les interactions entre les agents entrent en jeu. Des agents rationnels doivent donc être décrits en tenant compte du fait qu'ils sont conscients de ces interactions entre leurs objectifs et ceux des autres agents. Les développements récents de la théorie économique, la théorie de l'organisation industrielle notamment, font donc une large place à la théorie des jeux dont l'objet est l'étude des interactions des différents joueurs. Nous n'en traitons pas ici, faute de place, nous contentant d'exposer les différents éléments des problèmes de décision qui nous permettront de donner un sens précis à la notion de rationalité individuelle.

II / Comment formaliser un problème de décision

Dans la mesure où un décideur est satisfait des solutions aux problèmes de décision qui se posent à lui et où il n'a pas de compte à rendre sur la manière dont il les a obtenues, aucun effort de rationalisation ne semble nécessaire. En revanche, dès que la solution n'est pas satisfaisante ou qu'il semble qu'elle puisse être améliorée, le décideur aura besoin d'analyser le problème. Cette analyse, qui conduit à une certaine formalisation (non nécessairement mathématique), permettra aussi d'expliquer plus aisément pourquoi telle solution a été retenue plutôt que telle autre. Le besoin de telles justifications se fait sentir dès que le décideur veut rendre des comptes sur sa décision, et, en particulier, dans les situations où les conséquences de la décision prise ne sont pas immédiatement appréciables. C'est pourquoi les ingénieurs et les gestionnaires utilisent fréquemment des formalisations de leurs problèmes de décision grâce à des graphiques, des arbres de décision, des tableaux, etc., et sont conduits à développer des méthodes et des critères qui permettent à la fois de calculer les meilleurs choix et de justifier la manière dont ils ont été obtenus. Ces méthodes sont fondées sur des modèles formalisés et les décisions sont prises en utilisant des résultats de la programmation mathématique, encore appelée théorie du contrôle, c'est-à-dire un ensemble de méthodes du calcul des optimums de fonctions.

La théorie de la décision nécessite une représentation formelle des situations de décision et du comportement des décideurs qui permette d'utiliser la théorie du contrôle : un comportement rationnel consistera alors à choisir une décision qui optimise les critères représentants le comportement du décideur dans la situation décrite par le modèle.

Dans le chapitre suivant, nous traiterons en détail d'un problème particulier. Nous nous limitons ici à faire apparaître les différents éléments qui interviendront dans la théorie. Nous le faisons à travers le problème du choix d'investissement tel qu'il est présenté dans la littérature économique. C'est un problème qui est aisé à formaliser mathématiquement. En effet, comme nous allons le voir, les différents éléments que l'on retrouve dans tous les problèmes de décision dans l'incertain y sont présents et ils sont déjà exprimés en termes quantifiés. Les choix portent en effet sur des quantités : les quantités investies dans différents actifs. Les conséquences de ces choix sont quantifiées aussi : ce sont des revenus futurs ou des rendements. Cette formalisation naturelle n'empêche pas que, dans la pratique, ces choix soient souvent faits sans le support d'une théorie. En revanche, l'interprétation de ces choix en termes de décisions rationnelles peut servir à les justifier face, par exemple, à un conseil d'administration. Dans certains cas de problèmes d'investissement complexes, ou dans le cadre d'une théorie économique des choix d'investissements, le choix rationnel pourra s'appuyer sur l'optimisation de critères définis par la théorie de la décision.

1. Un problème de décision formalisé : le choix de portefeuilles

Vous avez un capital de 100 000 euros que vous désirez investir dans des actions et des obligations. Pour des raisons personnelles et institutionnelles (mais surtout pour simplifier l'exposé de cet exemple !), supposons que vous n'ayez le choix qu'entre les actions de quatre sociétés : Alfath, Bétard, Gammage et Deltham, et des bons du Trésor à trois mois. Vous pourriez former votre portefeuille en achetant pour 20 000 euros de chacun de ces titres et voir venir ! Si le taux de rendement pour trois mois des bons du Trésor est de 4 %, vous savez que vous récupérerez 20 000 + 800 = 20 800 euros dans trois mois. En ce qui concerne les 80 000 euros investis dans les autres actifs, vous ne savez pas ce qu'il adviendra dans trois mois. Chacun des titres peut voir son prix monter ou descendre, c'est ce que vous avez pu observer sur les cours de la Bourse depuis un an, en comparant les cours de trois mois en trois mois. Les cours des différents titres ne varient pas tous autant ni de la même manière ; il faudrait préciser cela pour pouvoir les comparer. En faisant la différence du cours d'un actif à une certaine date et de son cours trois mois plus tard, vous obtenez son rendement. En divisant ce rendement par le cours initial, vous obtenez le taux de rendement à trois mois. Vous voyez ainsi, par exemple, que, pendant les trois derniers mois, les taux de rendement de tous les titres sont négatifs ! Si cet état de chose devait durer il ne faudrait sans doute pas investir dans ces titres et placer l'intégralité des 100 000 euros en bons. Ce n'est pas ce que vous conseille votre oncle qui ne place que 10 000 euros en bons, 50 000 euros en Alfath, dont le taux de rendement les trois derniers mois est le plus négatif, et 20 000 euros en Bétard et en Gammage, dont les taux sont différents, mais moins élevés que celui de Deltham dans lequel il n'investit pas. Votre oncle n'est pas un théoricien de la décision, mais se flatte d'avoir du nez. Toutefois, sa décision, c'est-à-dire son choix de portefeuille, peut être expliquée si nous nous donnons la peine de formaliser ce qu'il fait intuitivement. Il ne fonde pas sa décision sur la seule observation des taux de rendement sur les trois derniers mois, mais sur les variations des cours sur une période bien plus longue. De cette observation, on peut retenir que le taux de rendement d'Alfath varie irrégulièrement autour d'une valeur moyenne que vous pouvez calculer : c'est 8 %. Les deux autres titres retenus par votre oncle ont des taux moyens de 5 % et de 6 % respectivement. Mais pourquoi a-t-il écarté le titre Deltham de son portefeuille alors que son taux moyen est de 7 % et que, pendant la dernière période, il était, à – 1 %, le plus élevé ? Il vous dit qu'il n'a pas confiance, et, en regardant les cours passés, vous observez que leur variabilité a, en effet, une ampleur qui dépasse largement celle des autres titres. En revanche, il semble que la variabilité de Bétard et de Gammage soit très faible. Afin de vous fixer les idées, vous pouvez calculer les écarts (pris positivement) entre les taux calculés chaque jour et le taux moyen. Pour résumer cette série, vous pouvez en faire la moyenne. Vous trouvez des nombres positifs, appelés écarts positifs moyens, qui sont une mesure de la variabilité. Vous trouvez 25 pour Deltham, 20 pour Alfath, 10 pour Gammage et 9 pour Bétard. Nous pouvons alors imaginer qu'intuitivement votre oncle a pris une décision qui s'explique par le raisonnement suivant : Alfath et Deltham peuvent rapporter gros, mais ils varient beaucoup, donc je n'investis pas tout dedans car j'aurai besoin de liquidités dans trois mois. Pour assurer un minimum, je place une partie en bons. Comme on constate aussi qu'ils varient à peu près dans le même sens (leurs taux sont fortement corrélés), il vaut mieux tout concentrer sur Alfath qui a un taux moyen supérieur et une variabilité légèrement moindre. (Remarquons à ce point que tout le monde ne fait pas le même raisonnement que votre oncle car sinon le cours de Deltham s'effondrerait.) Quant aux deux autres titres, ils varient si peu qu'il y a peu de risque de perte, et leurs taux de rendement sont tout de même supérieurs à ceux des bons : j'en prends aussi.

En résumé, le rendement du portefeuille dans trois mois dépendra de sa composition : les quantités investies dans chacun des actifs, c'est la décision qu'il faut prendre. Il dépendra aussi des cours dans trois mois ; ceux-ci sont inconnus et difficilement prévisibles à part celui du bon du Trésor qui est sans risque. Les titres autres que le bon présentent un risque qui est lié à leur variabilité. Ce risque peut être étudié sur la base de l'observation des cours passés. En résumant la variabilité par quelques nombres indicatifs, il est possible de comparer les rendements possibles. Cela ne suffit pas à déterminer totalement la décision, puisque ces indicateurs devront être complétés par le montant du capital initial, des besoins de liquidité finale, et d'une attitude personnelle vis-à-vis du risque. Tout le monde préfère le rendement (la conséquence de la décision) le plus élevé, mais tous les gens qui ont accès aux mêmes informations (les indicateurs de rendement moyen et de variabilité, entre autres) ne prennent pas les mêmes décisions : le classique « père de famille » prudent placera son capital en bons et peut-être sur Bétard et Gammage ; votre oncle, qui ne craint pas le risque, préfère parier assez gros sur Alfath.

Cet exemple a introduit les éléments qui serviront à formaliser un problème de décision. Nous le reprenons sous la forme plus abstraite que l'on trouve dans les manuels de finance.

Un portefeuille est une liste de quantités d'actifs détenus par un investisseur. Le problème de choix de portefeuille consiste donc à décider des proportions d'un certain capital donné que l'investisseur allouera à chacun des actifs de la liste. Les prix de ces actifs sont supposés connus. De ce fait, la liste des proportions du capital investi définit complètement le portefeuille. Un portefeuille sera défini par une liste : x_α, x_β, x_γ, x_δ, x_0 des proportions du capital investi dans chacun des cinq actifs [1] disponibles dans notre exemple. Le choix de portefeuille consiste donc à décider d'un vecteur (une liste de nombres) à cinq composantes (ici). Le premier élément du problème de décision est donc aisément formalisé : l'ensemble des décisions possibles est une partie de l'ensemble des vecteurs à cinq composantes.

Quelles sont les conséquences possibles du choix d'un portefeuille ? Admettons, pour simplifier, que l'investissement se fasse sur un horizon fixé, date à laquelle chacun des actifs procurera un rendement, et soit r_i le rendement de l'actif appelé i. À cette date le portefeuille procurera le rendement : $r = x_\alpha r_\alpha + x_\beta r_\beta + x_\gamma r_\gamma + x_\delta r_\delta + x_0\ 0{,}4$. Ce nombre est la conséquence du choix de portefeuille. C'est en fonction des conséquences que les décisions sont prises puisque la comparaison entre différents portefeuilles possibles se fera à partir de la comparaison des rendements qu'ils peuvent procurer. La définition de l'ensemble des conséquences possibles et leur formalisation sont généralement une des tâches les plus délicates de la formalisation d'un problème de décision. Dans le problème du choix de portefeuille nous voyons que cela ne présente pas de difficulté dès que les rendements possibles des actifs sont bien définis.

Si ces rendements étaient connus sans incertitude, le problème de décision serait extrêmement simple à résoudre, les investisseurs étant supposés préférer les rendements élevés. Le choix rationnel s'impose donc : l'investisseur investira tout son capital dans l'actif de plus haut rendement s'il est unique et, s'il y en a plusieurs, indifféremment entre les actifs qui ont le même rendement maximal. Mais les rendements sont généralement incertains et les conséquences du choix d'un portefeuille sont les différentes valeurs que peut prendre son rendement.

Rappelons les éléments d'un problème de décision que le problème de choix de portefeuille nous a permis de formaliser.

1. Dont les lettres grecques des indices rappellent les noms des actifs de l'exemple… à part le dernier !

• *L’ensemble des décisions possibles*. — Cet ensemble sera déterminé par les objets de choix possibles, ici les portefeuilles, c’est-à-dire des vecteurs de cinq nombres. Autant que possible, il sera représenté par un ensemble de nombres ou de vecteurs ayant les propriétés mathématiques nécessaires pour pouvoir appliquer les résultats de la théorie du contrôle.

• *L’ensemble des événements élémentaires*. — Il représente l’incertitude. Il est encore appelé ensemble des états de la nature ou ensemble des aléas en faisant référence aux jeux de hasard il serait plus général de le désigner comme l’ensemble des éléments (des variables) non contrôlés par le décideur. Dans notre exemple, ces états sont les différentes valeurs que peuvent prendre les rendements de chacun des actifs. Cet ensemble n’est pas nécessairement fini, comme le montre l’exemple des rendements possibles d’un titre financier dont il est courant de supposer qu’il puisse prendre toutes les valeurs d’un intervalle de nombres, Alfath varie entre – 5 % et + 12 %, par exemple.

• *L’ensemble des conséquences possibles*. — La conséquence du choix d’un portefeuille, c’est son rendement. Il dépend à la fois des proportions investies dans chacun des actifs (la décision) et des rendements de chacun des actifs (les états aléatoires). C’est initialement sur cet ensemble, souvent difficile à bien définir, que le décideur aura des préférences. Cela signifie qu’il sera capable de comparer les différentes conséquences, puisque, de ces comparaisons, il déduira le choix de sa décision en remontant des conséquences aux décisions.

• *La relation entre décisions, événements élémentaires et conséquences*. — C’est grâce à cette relation, qui pourra être définie comme une fonction en définissant d’une manière adaptée l’ensemble des aléas, que des critères sur les décisions pourront être définis à partir des préférences sur les conséquences et du comportement vis-à-vis de l’incertitude que nous analyserons plus loin.

Les différents éléments que nous avons dégagés du problème d’investissement pourront aisément être retrouvés dans les autres exemples de problèmes de décision classiques que nous présentons à présent.

2. Quelques exemples de problèmes de décision

Nous traiterons en détail le premier exemple : ce sera l'objet du chapitre III ; nous nous contentons ici d'une brève description afin de faire apparaître les différents éléments que nous avons relevés dans le paragraphe précédent.

• *Exploitation minière.* — Une compagnie minière, possédant un droit d'exploitation sur un site, doit décider de l'exploiter ou non. Des relevés géologiques indiquent qu'il y a très vraisemblablement une quantité importante de minerai exploitable ; en revanche, sa qualité est inconnue. Il peut être décidé d'effectuer de nouveaux forages pour sonder la qualité du minerai, ceux-ci sont coûteux et leurs résultats ne sont pas certains. Il est aussi possible de faire appel à un expert ; lui aussi coûte cher et n'est pas infaillible. D'autres inconnues pèsent sur la décision : les coûts d'exploitation et les prix de vente futurs du minerai en particulier. Les décisions ont ici plusieurs composantes : forage (oui ou non), expertise (oui ou non) et exploitation (oui ou non). Les aléas ont au moins trois composantes : la qualité du minerai, la fiabilité du forage et/ou de l'expert, les prix de vente futurs. La conséquence d'une décision est le profit futur, il dépend des aléas selon une formule qui peut être établie dans chaque cas. Nous présenterons dans le chapitre suivant un traitement simplifié de ce problème.

• *Traitement d'une maladie.* — Face à des symptômes précis, un médecin reste incertain quant au stade d'évolution de la maladie (les aléas sont les différents stades possibles). À un stade peu développé, un premier traitement est efficace à 90 % ; à un deuxième stade, il n'est plus efficace qu'à 50 %, mais un second traitement l'est à 80 % alors qu'il aurait des effets secondaires très graves au premier stade ; enfin, à un troisième stade, il n'y a plus rien à faire. Dans ce problème, les conséquences sont la guérison ou le décès du patient, les coûts de traitement et d'analyse sont négligeables ; en revanche, le temps est un facteur important sur l'évolution de la maladie. La décision de procéder à des analyses plus poussées avant de commencer un traitement peut donc être fatale. Les décisions ont donc deux composantes : analyses (oui ou non), type de traitement (premier, deuxième, aucun).

• *Lancement d'un nouveau produit*. — Une société industrielle doit décider de lancer elle-même un nouveau produit mis au point par son service d'études ou d'en vendre le brevet à une autre société. Une décision intermédiaire consiste à fabriquer et lancer ce produit à une échelle expérimentale et de décider ensuite d'en développer l'exploitation ou d'en céder le brevet. L'incertitude porte sur le marché accessible à un certain coût d'exploitation et de publicité, et la capacité de conserver ce marché après que la concurrence a imité le produit. Les conséquences sont les profits nets futurs.

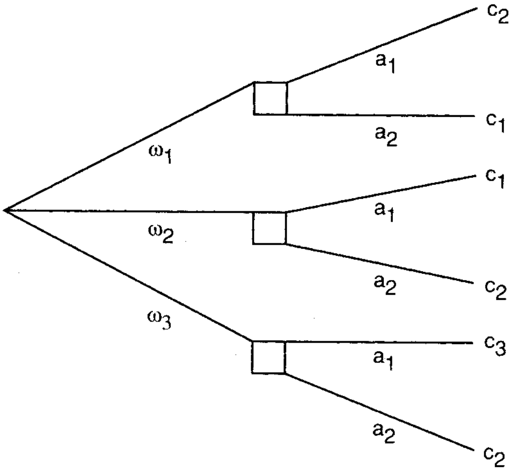
3. Arbres de décision

Une manière de décrire un problème de décision consiste à en représenter les éléments sur un arbre, c'est-à-dire un graphe composé de sommets et d'arcs qui les rejoignent. Dans un problème de choix entre deux décisions a_1 a_2, dont les conséquences dépendent de trois états de la nature ω_1, ω_2, ω_3, ceux-ci peuvent être représentés par trois arcs issu d'un sommet. À l'extrémité de chacun de ces arcs, les sommets représentent les situations où les décisions sont prises. Les décisions seront représentées aussi par deux arcs. Les six sommets terminaux correspondent alors aux conséquences finales contingentes aux chemins que l'on peut suivre le long de l'arbre.

L'intérêt de la représentation d'un problème de décision par un arbre, même s'il se révèle, en général, que cette représentation est partielle, réside dans le fait qu'elle permet de décrire le problème tel qu'il se présente, afin d'en faire apparaître progressivement les différents éléments. Dans l'arbre précédent, la conséquence c_2 est obtenue à partir de la décision a_1 si l'événement ω_1 se réalise, mais de la décision a_2 si l'un des événements ω_2 ou ω_3 se réalise. Le choix de a_1 dépend donc de l'évaluation de la vraisemblance de la réalisation des événements.

Nous nous servirons de la représentation par un arbre au chapitre suivant pour traiter du problème d'exploitation d'un site minier.

ARBRE DE DÉCISION



4. Comment formaliser l'incertitude

Nous avons vu apparaître l'incertitude relative aux conséquences des décisions prises dans les exemples précédents

Dans le problème d'extraction minière, l'incertitude porte tout d'abord sur la présence ou non de minerai et sur sa qualité. En admettant que trois types de qualités : bon, faible et inexploitable soient retenus, nous avons quatre événements à considérer : pas de minerai, minerai inexploitable, faible minerai, bon minerai. Afin de décider de faire un sondage ou pas, la vraisemblance de ces événements sera prise en compte, elle pourra être quantifiée à partir de données d'experts. Mais il se peut qu'une telle quantification soit *a priori* jugée impossible, non fiable ou tout simplement dénuée de sens. En revanche, les prix de vente futurs sont une seconde source d'incertitude qui est du même type que celle des rendements d'actifs dans l'exemple précédent.

La théorie de la décision nous apprendra à distinguer deux types d'incertitudes. Les jeux de hasard et l'évaluation des

paris, qui ont servi d'abstraction pour l'étude des problèmes de décision, nous permettent de les distinguer par analogie :
— le premier type est caractérisé par des variables engendrées par des mécanismes : il correspond aux paris sur les loteries, roulettes, cartes, etc. ;
— le second par des variables engendrées par des expériences trop complexes pour être répétées dans des conditions identiques : il correspond aux paris sur des événements sportifs tels que les courses de chevaux, les matches de boxe ou de football, sur des événements sociaux comme des élections, ou sur des événements météorologiques, etc.

Ce qui caractérise le premier type d'incertitude est le côté mécanique de la génération des variables, qui fait qu'avant de s'engager sur un pari le décideur a la possibilité d'observer la fréquence d'apparition des événements qui lui semblent pertinents. Ainsi, nous savons par expérience qu'une pièce lancée tombe une fois sur deux sur pile, que l'as a une chance sur six d'apparaître dans le jet d'un dé, etc. Nous savons peut-être aussi que chaque numéro du Loto national a une chance sur quarante-neuf de sortir, mais en revanche nous n'avons pas pu observer la fréquence d'apparition de la suite 48, 03, 25, 39, 11, 05, 44, que nous voudrions jouer. La probabilité d'apparition de cet événement peut cependant être calculée grâce à la théorie des probabilités qui a été développée pour formaliser ce type d'incertitude. De nombreux parieurs, ne sachant pas faire ce calcul, se conduisent comme si l'incertitude à laquelle ils font face était du second type. Il en est souvent ainsi dans l'appréciation des rendements futurs des portefeuilles dont nous avons discuté plus haut. Mais quel que soit son type, l'incertitude sera formalisée par :
— un ensemble de résultats possibles ;
— un ensemble d'événements qui affectent les conséquences des décisions (les taux sont inférieurs à 4 %). Un événement est caractérisé par les résultats qui le vérifient (si le taux est de 2 %, l'événement précédent est vérifié) ;
— une pondération de ces événements. Les poids affectés à chaque événement peuvent provenir de la fréquence avec laquelle ils ont été observés. Plus généralement, ils correspondent à une évaluation subjective de la vraisemblance de leur

apparition. Dans l'un comme dans l'autre cas, cette pondération pourra être formalisée par la notion de probabilité [2].

En résumé, après avoir procédé à une description des différents éléments pertinents d'un problème de décision grâce à des listes, des diagrammes et des arbres de décision, on s'attachera à en donner une formulation mathématique. Les outils puissants que propose la théorie des probabilités, dont découlent la théorie statistique et la théorie des séries temporelles, ont amené les théoriciens de la décision à privilégier la formalisation de l'incertitude en des termes qui permettent d'utiliser ces théories mathématiques.

2. Ce mot désigne la qualité d'un événement « probable », c'est-à-dire dont on peut prouver qu'il est pertinent. Une distribution de probabilités est une mesure (elle associe un nombre à cette qualité).

III / Comment résoudre un problème de décision

Nous avons exposé, au chapitre précédent, un problème d'exploitation d'un site minier. Précisons-le et voyons comment nous pouvons en résoudre une version simple [1]. Le décideur est une compagnie pétrolière et son expérience de la prospection lui permet de savoir qu'une première série de forages dans la zone en question donnera des résultats sur la qualité de la nappe ; ces résultats peuvent être répartis en trois catégories : P (positif), D (douteux) ou N (négatif). L'expérience, dans des zones semblables, a montré que, dans cinquante pour cent des cas, le résultat était douteux et dans les autres cas le résultat n'était positif qu'une fois sur deux. Dit autrement, la compagnie met une probabilité *a priori* de $\frac{1}{4}$ sur la possibilité de trouver un résultat positif, $\frac{1}{2}$ de trouver un résultat douteux et $\frac{1}{4}$ de trouver un résultat négatif àla suite de ce premier forage. Mais dire que le forage est positif ne veut pas nécessairement dire que le site est exploitable : un second forage pourra permettre de conclure définitivement si le gisement est exploitable (G) ou non ($\overline{G}$). La vraisemblance de cette réponse dépend du résultat du forage précédent : dans le cas d'un premier résultat positif, la probabilité que le second forage indique que le site est exploitable est plus importante que dans le cas où la première réponse est douteuse. Ces différentes

1. Suggérée par Michèle Cohen et Jean-Yves Jaffray, que je remercie.

probabilités sont connues du décideur et résumées dans le tableau suivant (dans les termes de la théorie des probabilités, les nombres indiqués sont des probabilités conditionnelles) :

Indications du premier forage	*Probabilité de G*	*Probabilité de* $\overline{G}$
P (positif)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
D (douteux)	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
N (négatif)	$\frac{1}{15}$	$\frac{15}{16}$

1. Analyse du problème

À ce stade de l'analyse du problème, les décisions que peut prendre le décideur sont de deux types : d'une part, mettre l'exploitation en route ou non ; d'autre part, faire procéder à l'un et/ou à l'autre forage. Nous avons, par exemple : ne pas faire de forage et abandonner le site ; ne pas faire de forage et mettre le site en exploitation ; faire un premier forage et mettre en route l'exploitation si le résultat n'est pas négatif ; faire les deux forages et procéder à l'exploitation si le site est déclaré exploitable, etc.

Mais au lieu de faire déjà une liste exhaustive, voyons quelles sont les conséquences des décisions.

Deux choses sont à prendre en compte : les coûts et les gains éventuels. Nous comptons en unités monétaires, des millions d'euros, par exemple. L'achat du site a déjà coûté 6 unités, le premier forage en coûte 4, le second 10 et la mise en exploitation 100. Quant aux gains, ils sont nuls si le gisement n'est pas exploitable, ils sont de 1 020 unités s'il l'est (là, bien sûr, nous simplifions beaucoup car les gains dépendent de la qualité du puits et de facteurs économiques extérieurs au problème d'exploitation). Les conséquences sont les profits possibles, leur liste est longue puisqu'ils varient de – 110 unités (mettre en exploitation après le premier forage et se retrouver avec un site inexploitable) à 1 020 unités (mettre en exploitation sans avoir fait aucun forage et avoir la chance de tomber sur un site exploitable). Nous excluons dès l'abord les décisions stupides qui consisteraient à exploiter le site bien que le second forage l'ait déclaré inexploitable ; de même, si la réponse est G, nous ne considérons pas la possibilité de ne pas exploiter le site en fin de compte.

Remarquons qu'il n'y a que deux aléas qui affectent les conséquences des décisions : soit le site est exploitable, G ; soit il ne l'est pas, $\overline{G}$; cette incertitude sera levée par la réponse du second forage ou par la mise en exploitation. Étant donné les informations de la compagnie concernant les probabilités d'occurrence des résultats des forages, la probabilité que le site soit exploitable est facile à calculer : c'est la probabilité que la réponse du second forage soit G ; celle-ci dépend de la réponse du premier forage ; nous avons, en notant $\pi(G)$, cette probabilité :

$\pi(G) = \pi(G \text{ et } \{P \text{ ou } D \text{ ou } N\}) = \pi(\{G \text{ et } P\} \text{ ou } \{G \text{ et } D\} \text{ ou } \{G \text{ et } N\})$.

La probabilité d'une réunion d'événements disjoints est la somme des probabilités de ces événements ; par ailleurs, chacun de ceux-ci est une intersection et nous savons que la probabilité de $\pi(G \text{ et } P) = \pi(G/P)\pi(P)$ [où $\pi(G/P)$ est la probabilité de l'événement G conditionnée par l'événement P, donnée par le tableau], nous avons donc :

$\pi(G) = \pi(G/P)\pi(P) + \pi(G/D)\pi(D) + \pi(G/N)\pi(N)$.

En utilisant les probabilités données, nous avons :

$$\pi(G) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64} \cong 0{,}14.$$

Il est facile de vérifier avec la même méthode que l'on a bien :

$$\pi(\overline{G}G) = \frac{55}{64} = 1 - \pi(G) \cong 0{,}86.$$

Ce qui veut dire que la compagnie sait qu'il y a très peu de chances que le gisement soit exploitable. Aussi, exploiter sans faire de forage pourrait présenter un grand risque : celui de perdre 106 unités à 86 chances contre 100, contre un gain possible, mais peu probable, de 914 unités.

Mais il y a de nombreuses autres décisions possibles et il serait prématuré de décider d'exploiter avant de les avoir analysées. Pour cela, il faut en faire la liste et exprimer la relation entre ces décisions et les conséquences ; nous allons le faire en construisant un arbre.

Sur cet arbre, nous représentons par un carré les décisions partielles du décideur ; de ces carrés partent des arêtes qui représentent les conséquences momentanées de cette décision. Au départ, trois décisions possibles : abandonner le site (A_1), exploiter sans forage (E_1) ou faire le premier forage (F_1).

Après (A_1), l'arête donne la conséquence : – 6.

Après (E_1), les conséquences dépendent de l'exploitabilité du site ; nous représentons les deux possibilités par des arêtes partant d'un rond, elles correspondent à G et $\overline{G}$; nous en indiquons les probabilités entre parenthèses. Au bout de ces arêtes, les conséquences sont 914 et – 106.

Après (F_1), trois résultats aléatoires sont possibles : P, D et N, nous les représentons par des arêtes partant d'un rond sur lesquelles sont indiquées les probabilités de ces résultats. Au bout de chacune de ces arêtes, nous représentons par un carré la prise d'une nouvelle décision partielle : abandonner (A_2), exploiter (E_2) ou faire le second forage (F_2).

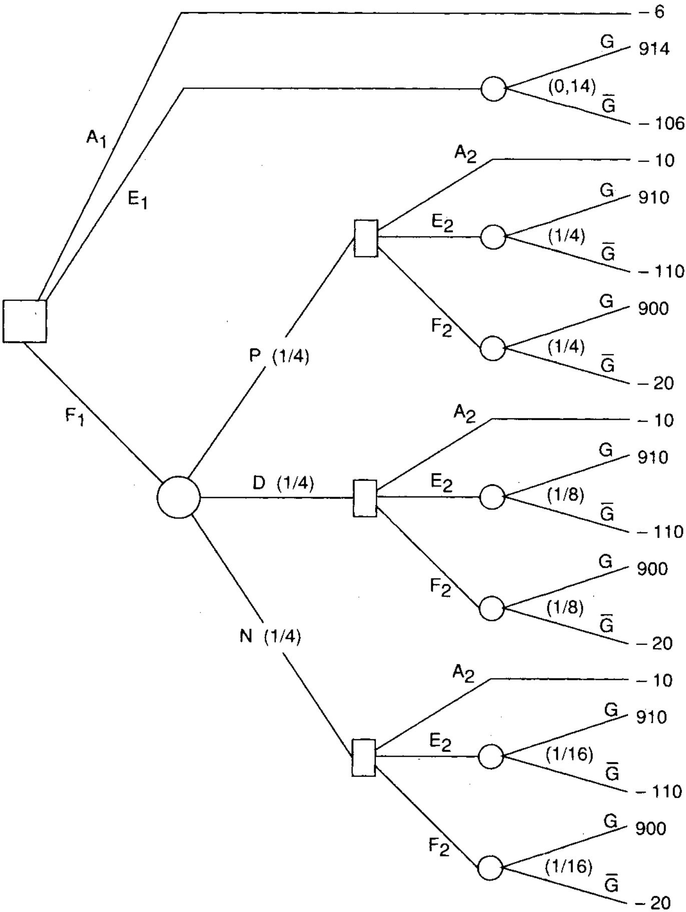
Après (A_2) et (E_2), les arêtes donnent les conséquences finales.

Après (F_2), les arêtes conduisent à des ronds d'où partent les dernières arêtes correspondant aux réponses finales et à leurs conséquences en termes de profits (positifs ou négatifs).

Le schéma nous donne la vision d'ensemble des décisons partielles et des informations qui pourront être obtenues à partir de la décision de faire le premier forage. Sur ce schéma, nous pouvons lire toutes les décisions qui incluent F_1, ainsi que leurs conséquences. Les chemins sur l'arbre sont appelés des stratégies ; ce sont des suites d'arêtes telles F_1, D, A_2, ce qui se lit : « Faire le premier forage, et, si la réponse est douteuse, arrêter. » Sa conséquence est – 10. Ou encore, F_1, D, F_2 : « Faire le premier forage, et, si la réponse est douteuse, faire le second, puis (nous l'avons sous-entendu) exploiter si et seulement si le site est exploitable. » Sa conséquence est 900 si le site est exploitable, – 20 sinon. Nous trouvons donc une liste de 14 stratégies possibles et la liste de leurs conséquences pour chaque état aléatoire.

Arrêtons-nous un instant sur deux manières d'envisager ce problème. La première consiste à voir les stratégies comme des décisions ; elle consiste donc à prendre en compte la dynamique du problème. La seconde manière de voir le problème

ARBRE DE DÉCISION DU PROBLÈME D'EXPLOITATION MINIÈRE



consiste à le ramener à un problème statique, c'est-à-dire un problème où le temps ne joue pas de rôle.

Cet ouvrage se limitera pour l'essentiel à une présentation d'une théorie de la décision dans un cadre statique. En effet, la dynamique fait intervenir, pour être convenablement traitée, de nombreuses hypothèses dont l'exposé dépasserait les possibilités du cadre de cet ouvrage. Nous traiterons cependant ce problème particulier à la fois sous l'angle statique, et, dans un second temps, sous l'angle dynamique afin de faire prendre conscience des différences que ces traitements impliquent. Avant même de commencer, distinguons les décisions qui, dans le traitement dynamique, sont des stratégies, c'est-à-dire des suites de décisions partielles qui dépendent du temps et des informations, alors que, dans le traitement statique, elles sont définies globalement.

Voici deux exemples de stratégies (dynamiques) :

— « faire le premier sondage, puis, si le résultat est positif, procéder à l'exploitation, s'il est douteux, faire le second sondage, s'il est négatif, abandonner le site » ;

— « abandonner le site sans faire de sondage. »

Voici trois exemples de décisions globales (statiques) :

— « faire le premier sondage, puis le second » ;

— « faire le premier sondage, puis abandonner » ;

— « abandonner le site sans faire de sondage » (oui, c'est aussi une stratégie puisque, prise dès le départ, cette décision ne fait pas intervenir le temps).

2. Traitement statique du problème de décision

Nous considérons le problème globalement, c'est-à-dire que nous définissons les différentes décisions possibles concernant tout le processus, et, sur la base d'un critère que nous nous donnons, nous choisissons parmi ces décisions. Les décisions, telles que nous les avons définies au chapitre précédent, sont des ensembles de stratégies telles celles qui comprennent F_1 et F_2 ; on remarque sur l'arbre du schéma que toutes ces stratégies ont les mêmes conséquences finales. Appelons F_1-F_2 une telle décision, sa conséquence si G se réalise est 900 et – 20 sinon. La fonction qui relie les conséquences et les aléas aux décisions peut être définie par le tableau suivant :

Aléas \ *Décisions*	A_1	E_1	F_1-A_2	F_1-E_2	F_1-F_2
G	– 6	914	– 10	910	900
$\overline{G}$	– 6	– 106	– 10	– 110	– 20

Il est alors immédiat de voir que la décision F_1-A_2 a des conséquences pires que celles de A_1 dans tous les cas ; on dit que A_1 domine F_1-A_2 et on ne garde pour le reste de l'analyse que celle qui n'est pas dominée. Pour la même raison, on peut éliminer aussi F_1-E_2 qui est dominée par E_1, comme on s'en doutait bien. Il reste donc à comparer :

Aléas \ *Décisions*	A_1	E_1	F_1-F_2
G	– 6	914	900
$\overline{G}$	– 6	– 106	– 20

… et, pour cela, il nous faut un critère.

La compagnie peut tout d'abord exprimer certaines contraintes ; par exemple : « La perte ne peut pas dépasser 100. » Dans ce cas, la décision E_1 est éliminée, mais il faut tout de même un critère pour examiner les deux dernières décisions. Le profit moyen (ou, plus correctement, « espérance mathématique du profit ») est un critère, nous le verrons au chapitre IV. Le gain moyen de F_1-F_2 est : $900 \times 0{,}14 - 20 \times 0{,}86 = 126 - 17{,}2 = 108{,}8$, qui est largement positif. Dans ce cas, la décision de faire les forages sera prise même si l'on n'élimine pas la décision E_1 puisque le profit espéré de celle-ci est : $914 \times 0{,}14 - 106 \times 0{,}86 = 127{,}96 - 91{,}16 = 36{,}8$, bien inférieur à celui de F_1-F_2.

Mais, comme nous le verrons aux chapitres V et VI, ce critère ne tient pas compte du fait que les pertes peuvent être beaucoup plus craintes que les gains ne sont désirés : la moyenne traite symétriquement les nombres positifs et négatifs. Une compagnie qui craint les pertes peut avoir un comportement qu'une fonction des profits (et non les profits eux-mêmes) représente mieux. Supposons que la compagnie, pour un profit $x > -100$, utilise la fonction $u(x) = \dfrac{100x}{100 + x}$, où u(x) est appelé « l'utilité de x ». Cela veut dire qu'un gain de 100 est évalué à 50 alors qu'une perte de 100 vaudrait $- \infty$ (une manière d'exprimer qu'une telle perte est inacceptable). Le critère utilisé pour décider est alors l'utilité espérée que nous présenterons au chapitre V. L'utilité espérée de la décision F_1-F_2 est : $\dfrac{100 \times 900}{100 + 900} \times 0{,}14 + \dfrac{-100 \times 20}{100 - 20} \times 0{,}86 = 12{,}6 - 21{,}5 = -8{,}9$. L'utilité de A_1 étant $\dfrac{-100 \times 6}{100 - 6} = -6{,}38$, nous voyons qu'avec ce critère la compagnie décidera de ne rien faire et d'abandonner le site.

Nous avons vu que la décision était sensible au critère ; elle peut l'être aussi aux probabilités. Pour s'en convaincre, considérons un autre tableau donnant les probabilités de G et G conditionnées par les résultats du premier forage :

Indications du premier forage	*Probabilité de G*	*Probabilité de $\overline{G}$*
P (positif)	0,95	0,05
D (douteux)	0,5	0,5
N (négatif)	0,01	0,99

Nous avons, dans ce cas, $\pi(G) = 0{,}25 \times 0{,}95 + 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}25 \times 0{,}01 = 0{,}49$.

Le rendement espéré de la décision F_1-F_2 est :

$900 \times 0{,}49 - 20 \times 0{,}51 = 441 - 10{,}2 = 430{,}8$, ce qui est largement supérieur à ce qu'il était dans le cas précédent du fait que la probabilité de G est supérieure. Mais l'utilité espérée aussi

est majorée : $\dfrac{100 \times 900}{100 + 900} \times 0{,}49 + \dfrac{-100 \times 20}{100 - 20} \times 0{,}51 = 44{,}1 - 12{,}75 = 31{,}35$.

Aussi, avec ces probabilités, il sera décidé de ne pas abandonner le site même en utilisant le critère de l'utilité espérée.

Mais ne semble-t-il pas souhaitable d'abandonner tout de même le site si le premier forage donne un résultat négatif ? Nous allons analyser cette question, mais il nous faut pour cela traiter le problème de manière dynamique car, dans le cadre statique, nous ne pouvons pas considérer la possibilité de modifier les décisions au cours du temps.

3. Traitement dynamique du problème de décision

Si nous prenons en compte le rôle du temps, les décisions sont les stratégies, c'est-à-dire des suites de décisions. Chacune de celles-ci sera prise selon des critères qui portent sur leurs conséquences momentanées ; ces critères dépendent donc généralement du temps et de l'état de l'information. Le fait que les critères dépendent aussi du processus de décision introduit de grandes difficultés théoriques que nous allons éviter en supposant, ici, que le décideur s'en tient toujours au même critère, celui du profit espéré, par exemple.

Sous cette hypothèse, nous allons pouvoir utiliser le principe de la programmation dynamique : selon ce principe, le décideur va remonter le temps en partant de la fin, en choisissant à chaque étape la décision momentanée la meilleure ; sa stratégie optimale sera alors formée de la suite des décisions optimales en chaque instant.

Traitons le problème une première fois en utilisant le premier tableau de probabilités conditionnelles.

Plaçons-nous donc à l'instant où le premier forage a déjà été fait et considérons les différents cas.

Il est facile de calculer que, dans tous les cas, c'est la décision momentanée, F_2, qui a le plus grand profit espéré (210 ; 35 ; 37,5 au lieu de 165 ; 17,5 ; – 45,55 pour E_2 respectivement dans les cas P, D et N).

Plaçons-nous alors à l'instant précédent où il faut comparer A_1, E_1 et F_1. Nous connaissons les profits espérés de A_1 et de E_1, il nous reste à calculer celui de F_1. Nous considérons que les conséquences de F_1 sont les profits espérés des décisions momentanées que nous avons sélectionnées dans l'étape précédente. Ici, il s'agit chaque fois de F_2 dont les profits espérés sont, selon les cas :
$c_P = 900\ \pi(G/P) - 20\ \pi(\overline{G}G/P)$; $c_D = 900\ \pi(G/D) - 20\ \pi(\overline{G}/D)$, et
$c_N = 910\ \pi(G/N) - 20\ \pi(\overline{G}/N)$.

Le profit espéré de F_1 est alors : $c_P\pi(P) + c_D\pi(D) + c_N\pi(N)$, ce qui, en mettant en facteur nous donne :

$900\ [\pi(G/P)\pi(P) + \pi(G/D)\pi(D) + \pi(G/N)\pi(N)] - 20\ [\pi(\overline{G}/P)\pi(P) + \pi(\overline{G}/D)\pi(D) + \pi(\overline{G}/N)\pi(N)]$
soit, tout simplement : $900\ \pi(G) - 20\pi(\overline{G})$, qui est le profit espéré de la décision statique F_1-F_2 (que nous avons déjà calculée : 430,8).

Bien sûr ! Cela vient du fait que, puisque dans la seconde étape nous choisissons toujours la même décision, l'aspect dynamique du problème disparaît.

En utilisant les utilités espérées, nous aurions eu le même effet. Dans la seconde période, après le résultat du premier forage, nous aurions trouvé que, dans tous les cas, l'utilité espérée de F_2 est supérieure et donc que, dans la première période, l'utilité espérée de F_1 est celle de la décision (globale) F_1-F_2 (nous avions trouvé : 31,35).

Dans ce cas, les conclusions du traitement dynamique du problème sont identiques à celles du traitement statique du fait que le décideur ne prend pas des décisions qui dépendent de ses informations en seconde période.

L'aspect dynamique du problème ne disparaît pas si les décisions momentanées de la seconde période diffèrent selon le résultat du premier forage. C'est ce qui se passe si les probabilités conditionnelles sont celles du second tableau :
— si le premier forage est positif, la probabilité d'avoir un gisement exploitable est si haute qu'il vaut mieux procéder immédiatement à l'exploitation (son profit espéré est supérieur) ;
— en revanche, dans le cas où le premier forage donne un résultat douteux, c'est la décision de faire un second forage qui doit être prise ;
— enfin, dans le dernier cas, la probabilité d'avoir un gisement exploitable est si faible qu'il vaut mieux abandonner.

La décision est donc véritablement une stratégie, elle consiste à faire le premier forage, puis, selon les cas, à exploiter sans attendre, à faire un second forage ou à abandonner le site.

Revenons alors à la première étape. Les conséquences de la décision F_1 sont les suivantes :
$c_P = 910 \times 0{,}95 - 110 \times 0{,}05 = 864{,}5 - 5{,}5 = 859$.
(Alors que le profit espéré de F_2 ne serait que de : $900 \times 0{,}95 - 20 \times 0{,}05 = 854$.)
$c_D = 900 \times 0{,}5 - 20 \times 0{,}5 = 440$.
(Alors que le profit espéré de E_2 ne serait que de : $910 \times 0{,}5 - 110 \times 0{,}05 = 400$.)
$c_N = -10$.

(Alors que le profit espéré de F_2 ne serait que de : $900 \times 0{,}01 - 20 \times 0{,}99 = -10{,}8$ et le profit espéré de F_2 ne serait que de : $910 \times 0{,}01 - 110 \times 0{,}99 = -99{,}8$.)

Le profit espéré de la décision momentanée F_1 est alors :
$0{,}25 \times 859 + 0{,}5 \times 440 - 0{,}25 \times 10 = 214{,}75 + 220 - 2{,}5 = 435{,}25$.

Celui de la décision E_1 est : $914 \times 0{,}49 - 106 \times 0{,}51 = 447{,}86 - 54{,}06 = 393{,}8$.

Ainsi le traitement dynamique du problème conduit le décideur à suivre la stratégie qui consiste à faire le premier forage, puis à exploiter, faire un second forage ou abandonner, selon les cas.

Moralité

« Rien ne sert de courir, il faut partir à point »… Le lièvre et la tortue en sont un très mauvais témoignage, d'abord parce qu'ils ne font généralement pas la course et que, lorsque la garrigue prend feu, c'est malheureusement la tortue, et non le lièvre, dont la chair est bien meilleure, qui est rôtie à point. La fable, dite par La Fontaine, est pourtant un régal. Cet exemple de problème de décision ne prétend pas l'être, mais il nous a permis, comme les fables, de soulever quelques lièvres :

— *la formalisation :* elle simplifie extrêmement le problème. Il faut veiller à n'en pas perdre des éléments sous l'influence de quelques données ; ici, le tableau des probabilités conditionnelles de départ pouvait cacher l'aspect dynamique du problème ;

— *l'ébauche d'un arbre de décison :* l'arbre entier étant généralement trop important pour être proprement dessiné, l'ébauche permet de mettre en évidence les éléments pertinents du problème ;

— *la liste des décisions :* elle est souvent simplifiée par les considérations de dominance, celles-ci sont établies en analysant les conséquences ;

— *les conséquences :* dans la fable, elles sont absentes, si le feu de garrigue suscite la course, le lièvre part à point. Les décisions seront rangées selon les pertes et les gains, mais ceux-ci dépendent généralement d'aléas ;

— *les aléas :* il est fondamental de les répertorier, et, autant que possible, de les quantifier parce qu'ils pourront être ainsi agrégés dans un critère ;

— *un critère :* c'est une fonction des conséquences dont on cherche le maximum (ou le minimum si c'est un critère qui décroît en fonction de ce que le décideur préfère), nous en verrons quelques-uns au chapitre IV, les deux que nous avons utilisés sont les plus connus, ils ne sont pas exempts de défauts : le premier (profit espéré) ne tient pas compte de l'asymétrie entre la perception des gains et des pertes ; le second, que nous justifierons au chapitre V et que nous utiliserons aux chapitres VI et VII, ne tient pas compte de la perception subjective des probabilités (c'est-à-dire de la déformation subjective des probabilités données, nous en parlerons au chapitre VII).

IV / Critères de décision

Le problème traité dans le chapitre précédent a nécessité l'emploi d'un critère pour comparer les décisions. Nous avons introduit deux critères permettant de faire un choix entre des décisions dont les conséquences sont incertaines, nous les verrons à nouveau plus loin (paragraphe 3) en compagnie d'autres critères classiques. Nous nous concentrons tout d'abord sur le rangement des conséquences elles-mêmes et celui qui s'en déduit pour les décisions dont les conséquences sont certaines (paragraphe 1). Nous établissons le rapport entre ces rangements (préférences) et l'optimisation d'un critère (paragraphe 2) ; nous poursuivrons cette démarche au chapitre suivant pour justifier le fondement du critère de l'utilité espérée. Auparavant, nous aurons passé en revue plusieurs difficultés concernant les critères : les critères multiples, l'agrégation des critères de décideurs différents et le problème de la dynamique rencontré dans le chapitre précédent.

1. Décisions rationnelles sans incertitude

Pour choisir la meilleure décision (ou l'une parmi les meilleures), il faut les avoir ordonnées. Ranger les décisions ne peut se faire que lorsque le décideur sait remonter des conséquences qu'il a rangées aux décisions elles-mêmes. C'est en cherchant à exprimer son ordre de préférence sur les conséquences que le décideur se rend souvent compte de la nécessité de définir très précisément les conséquences de ses décisions.

Pour souligner les difficultés que peuvent présenter ces deux étapes, prenons l'exemple du choix d'investissements sans risque. Il s'agit d'un problème de décision sans incertitude puisque les taux de rendement des différents actifs sont connus. Cependant, en cherchant à déterminer un ordre sur ces actifs, l'investisseur se rendra souvent compte que les taux de rendement annoncés ne lui suffisent pas à comparer les actifs : d'autres éléments comme les facilités de paiement, les dates d'échéances qui peuvent influencer la taxation des revenus, la fréquence des versements, etc. font que deux actifs de mêmes taux ne seront pas nécessairement indifférents pour un investisseur donné. Les conséquences des investissements pourront alors être définies par des rendements calculés par des procédures comptables faisant intervenir les différentes caractéristiques pertinentes : taux, taxes, échéanciers… Appelons « rendements actualisés » ces conséquences des investissements. La définition des conséquences étant donnée (grâce aux comptables), reste à les comparer. Ici les rendements actualisés s'ordonnent naturellement par valeurs croissantes et cet ordre est celui des préférences de la plupart des investisseurs. Une fois ce rangement des conséquences établi, l'investisseur pourra s'interroger sur les décisions qui amèneront aux meilleures conséquences.

Supposons que les investissements possibles portent sur des actifs d'échéances différentes. Pour définir la fonction conséquence (qui relie décisions et conséquences), il faudra établir une procédure d'actualisation qui permette de comparer les rendements. Une fois la fonction conséquence bien définie, la structure même des décisions rendra leur rangement plus ou moins aisé. Supposons que les décisions de l'investisseur puissent jouer sur deux variables : la quantité investie et l'échéance. L'ordre sur les conséquences est simple, mais il ne s'en déduit pas immédiatement un ordre sur les décisions qui permette de faire un choix. Cela vient de ce que les décisions ont ici deux composantes : à échéance donnée, les quantités investies sont naturellement rangées dans l'ordre des rendements qu'elles procurent ; à quantité fixée, les échéances sont rangées dans l'ordre des taux qu'elles procurent. Mais le décideur doit comparer des décisions comme : 100 unités, échéance trois mois et 10 unités, échéance dix ans. Pour cela, il devra définir un critère unique sur les deux variables de décision qui soit cohérent avec l'ordre qu'il a défini sur les conséquences. Ici, le critère s'impose, il est à nouveau établi par calcul comptable : c'est le rendement actualisé de l'investissement (qui est ici justement ce que nous avons défini comme la conséquence de l'investissement). Le décideur choisira donc un couple quantité-échéance qui lui procure le plus haut rendement actualisé possible sous les contraintes (de trésorerie, institutionnelles…) de son problème d'investissement. Le rendement actualisé est le *critère de décision* de ce problème. Dans ce problème, qui est simple parce que le critère de décision est aussi la fonction conséquence, il suffit de trouver les meilleures conséquences pour obtenir les meilleures décisions.

2. Représentation des préférences par un critère

Lorsqu'une collection de pièces de monnaie courante est présentée à un adulte et à un enfant, il est possible de prévoir le choix qu'ils vont respectivement faire parce que nous connaissons leurs préférences. En ce qui concerne l'adulte, sachant qu'il a une préférence pour le pouvoir d'achat le plus élevé, on se doute que son choix se portera sur une des pièces sur laquelle est inscrit le plus grand chiffre. Quant à un enfant que le pouvoir d'achat ne concerne pas encore, une observation plus fine de son comportement vis-à-vis des objets devra avoir été faite au préalable. Admettons que l'enfant préfère les choses les plus colorées et les plus brillantes, nous pourrons prédire qu'il choisira la plus brillante des pièces colorées lorsque l'alternative est simple, mais nous ne saurons peut-être pas laquelle il choisira entre une pièce d'un euro (brillante) et une pièce de 20 centimes (plus colorée mais terne).

Les pièces ayant été conçues par des adultes pour des adultes, il n'est pas surprenant de constater que le critère qui sert à les choisir est écrit dessus ! Les chiffres écrits sur les pièces représentent l'ordre donné par leur pouvoir d'achat. La valeur inscrite sur les pièces est le critère qui représente les préférences de l'adulte. Les préférences de l'enfant peuvent aussi être représentées par un critère, à condition qu'elles vérifient certaines propriétés. Si seule la taille importait, il nous serait facile de ranger toutes les pièces et de leur allouer des nombres, leurs diamètres en millimètres par exemple, qui croissent dans le même ordre que celui du rangement. Ces nombres définiraient alors le critère de choix de l'enfant : l'enfant rationnel choisirait une des pièces ayant le plus grand diamètre.

Si la couleur et la brillance importent, sans que l'une ne prévale sur l'autre, il ne sera pas possible de ranger strictement les pièces, ni par conséquent de les numéroter directement en suivant le rangement. Il y a une difficulté à représenter par un critère unique des préférences qui sont définies par un double critère. De telles préférences ne permettent pas de définir un ordre grâce auquel toutes les alternatives peuvent être comparées (nous revenons sur ce problème au paragraphe 3).

Lorsque les préférences portent sur un ensemble fini d'objets (ou un ensemble dénombrable, c'est-à-dire que l'on peut numéroter tous les objets par des nombres entiers), comme l'ensemble des pièces de monnaie, un critère n'est rien d'autre qu'une numérotation de ces objets. L'adulte et un enfant qui ne s'intéresserait qu'à la taille, n'auront pas la même numérotation (avec des pièces européennes). Nous dirons d'un tel critère qu'il « représente » les préférences. Pour que les préférences puissent être représentées, il faut que tous les objets soient comparables. Ceux qui sont indifférents se verront attribuer la même valeur par le critère, un objet strictement préféré à un autre aura une valeur supérieure à celle du premier. Cette propriété des préférences, qu'elles soient capables de comparer tous les objets, suffit à l'existence d'un critère (il n'est pas unique, mais tous amèneront aux mêmes choix : au lieu de ranger les pièces selon leurs diamètres en millimètres, on peut les ranger selon leurs surfaces en mètres carrés, ou la racine carrée de celle-ci, etc., sans changer le rangement).

Lorsque l'ensemble des objets sur lesquels portent les préférences n'est pas fini (ni dénombrable), cette propriété n'est pas suffisante pour représenter les préférences par un critère. Par exemple, si les conséquences d'investissement sont des rendements qui peuvent prendre toutes valeurs réelles entre – 10 et +10, et que le critère soit le rendement lui-même, cela signifie que les préférences rangent les rendements selon l'ordre naturel des nombres et qu'elles ont donc les mêmes propriétés que cet ordre. Pour pouvoir définir un critère qui représente des préférences sur de tels ensembles, il faudra qu'elles vérifient une propriété de continuité qui donne, à l'ensemble ordonné par les préférences, la même structure que l'ensemble des nombres réels auquel on cherche à le faire correspondre. Cette propriété de continuité est fondamentale pour la représentation de préférences sur des ensembles généraux. Elle est apparue dans les modèles formalisés de l'économie où les préférences des agents portent sur des paniers de biens qu'ils peuvent consommer ou produire (Debreu [1970]).

Choisir la, ou une, « meilleure » décision consiste, une fois le critère défini, à résoudre un problème d'optimisation (de ce critère) grâce aux outils et méthodes de la programmation mathématique.

Le problème traité dans ce chapitre consiste donc à traduire, par un critère (éventuellement plusieurs critères) sur les décisions, une relation de préférences sur leurs conséquences. Mathématiquement, un critère est une fonction à valeur numérique, et la représentation de préférences par un critère consiste à trouver une fonction, disons V, telle que si la conséquence de la décision « a » est préférée à celle de la décision « b », alors $V(a) \geq V(b)$. Remarquons que, réciproquement, $V(a) \geq V(b)$ définit une relation entre a et b et par conséquent entre leurs conséquences. Cette relation est particulière ; c'est ce que les mathématiques appellent un préordre.

Préordre

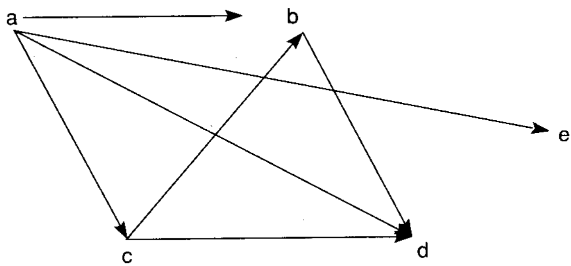
Un préordre est la description mathématique de ce que nous avons en tête lorsque nous rangeons nos affaires dans l'armoire : d'abord, on met tout ce qui est équivalent ensemble (les chemises, les chaussettes…), puis on range ces paquets. De haut en bas et de gauche à droite des étagères, les habits sont en « ordre », au sens mathématique du terme, même s'ils ne sont pas encore très « bien rangés », au sens ménager.

Un préordre est une relation entre éléments d'un ensemble qui est essentiellement transitive : si a est préféré à b et si b est préféré à c, alors a est préféré à c.

D'un préordre se déduit une relation d'équivalence, c'est une relation réflexive, transitive et qui, de plus, est symétrique : si a est indifférent à b, alors b est indifférent à a. Une relation d'équivalence permet de former des classes d'équivalence (les paquets) : ce sont les ensembles d'éléments qui sont équivalents (indifférents). L'ensemble de ces classes d'équivalence (appelé ensemble quotient) peut à présent être ordonné par la relation de préordre (mettre les paquets sur les étagères). Une classe, mettons celle de l'élément a, est préférée à une autre, mettons celle de l'élément b, si a est préféré à b (mettre la chemise sur l'étagère des chemises). Comme a et b ne sont pas indifférents, sinon ils seraient dans la même classe, cette relation est un ordre strict, c'est-à-dire une relation transitive et antisymétrique : si la classe A est préférée à la classe B, alors la classe B n'est pas préférée à la classe A (sinon les chemises et les chaussettes seraient mélangées).

Étant donné une relation de préférences sur un ensemble C, que nous noterons $\succcurlyeq$, nous dirons qu'une fonction $V : C \to \mathbf{R}$ représente les préférences si et seulement si, pour tout c et c' de C, $c \succcurlyeq c' \Leftrightarrow V(c) \geq V(c')$. Autrement dit, la fonction V affecte, à chacune des conséquences, des nombres rangés par ordre croissant respectant l'ordre des préférences. La signification et la construction d'une telle fonction sont immédiates dans le cas où les conséquences sont en nombre fini.

Considérons un ensemble C = {a,b,c,d,e} de conséquences et supposons que la relation « est préférée à » est représentée par les flèches du diagramme suivant (a « est préférée à » b, b « est préférée à » d, etc.) :



Les conséquences sont rangées $a \succcurlyeq c \succcurlyeq b \succcurlyeq d$; par ailleurs, nous avons aussi $a \succcurlyeq e$, mais nous n'avons pas de relation entre e et les autres conséquences. Sur l'ensemble {a,b,c,d}, la relation de préférence est représentée par n'importe quel numérotage croissant comme : $a \to 4$, $c \to 3$, $b \to 2$, $d \to 1$.

C'est ce que nous faisons naturellement en numérotant les conséquences rangées : $a = c_4$, $b = c_2$, $c = c_3$, $d = c_1$. Cela est possible parce que l'ensemble {a,b,c,d} est totalement ordonné par la relation de préférence. Celle-ci est alors représentée par la fonction, disons f, telle que f(a) = 4, f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = 1. En effet, $x \succcurlyeq y$ si et seulement si $f(x) \geq f(y)$ pour tout x et y dans {a,b,c,d}. Bien entendu, toute fonction croissante de f représente aussi la relation de préférence puisque, si g est une fonction croissante, $g[f(x)] \geq g[f(y)] \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow x \succcurlyeq y$.

En revanche, nous ne pouvons pas représenter les préférences sur l'ensemble C parce que la conséquence e n'est pas comparable à la conséquence d. Si nous étendions la fonction f à C, en affectant une valeur f(e) = k avec k > 4 = f(a) pour respecter le fait que a ≽ e, nous devrions avoir : e ≽ d, puisque f représente les préférences, ce qui n'est pas compatible avec le diagramme. Nous ne pourrons donc pas trouver de nombre k pour compléter la fonction f sur C, et, par conséquent, nous ne pourrons représenter cette relation de préférences par une fonction.

Nous avons rencontré la première condition que doit vérifier une relation de préférence pour pouvoir être représentée par une fonction : toutes les conséquences doivent pouvoir être comparées par la relation ; on dit dans ce cas que le préordre est total. La théorie de la décision appelle « axiomes » ces conditions ; l'axiome 0 sera donc :

A_0 : la relation de préférence est un préordre total.

Les préférences sur des ensembles finis (ou dénombrables) qui vérifient cet axiome pourront donc être représentées par une fonction. Rappelons que toute fonction croissante de cette fonction les représente aussi (qu'elles soient numérotées 1, 2, 3 ou bien 26, 42, 354, les décisions sont rangées dans le même ordre). Ce résultat s'étend de manière évidente aux ensembles non finis mais dénombrables.

Lorsque l'ensemble des conséquences n'est ni fini ni dénombrable, par exemple s'il s'agit de montants pouvant prendre toutes valeurs comprises entre 0 et 1 000, une condition supplémentaire de « continuité » devra être vérifiée : il ne faudrait pas qu'une suite de conséquences, qui sont toutes préférables à une certaine conséquence c, ait pour limite une conséquence qui ne soit pas préférée à c (nous en donnerons un exemple en construisant le critère de l'utilité espérée au chapitre V, paragraphe 3). Cette condition est exprimée de manière informelle par l'axiome :

A_1 : les préférences sont « continues ».

En pratique, on « numérotera » des conséquences dénombrables selon l'ordre des préférences, puis on complétera la représentation en prenant les limites des suites des valeurs des conséquences pour représenter les conséquences qui ne sont pas dans l'ensemble dénombrable. Un contre-exemple de préférences qui ne respectent pas cet axiome est donné dans l'encadré du paragraphe 5.

3. Critères classiques de décisions dans l’incertain

Un critère est donc une fonction qui associe un nombre à chaque décision et qui croît avec les préférences du décideur. Quand il n’y a pas d’incertitude sur les conséquences des décisions, nous avons vu au paragraphe 1 qu’il suffisait de définir le critère sur les conséquences (les taux de rendement des investissements, par exemple), pour l’obtenir sur les décisions elles-mêmes, une fois que la fonction qui relie décisions et conséquences est clairement définie.

Mais quand les conséquences des décisions sont aussi fonction d’un aléa, il n’est plus aussi simple de remonter des conséquences aux décisions. Nous avons vu au chapitre précédent que, d’une manière ou d’une autre, il nous fallait agréger les différentes conséquences d’une même décision pour obtenir un critère. C’est ce que font les différents critères que nous présentons ici en utilisant, ou non, des probabilités sur les aléas.

L’approche axiomatique, qui est celle de la théorie de la décision, a été précédée par le développement de méthodes pragmatiques de résolution de problèmes de décision. Nous présentons, au chapitre V et au chapitre VIII, des constructions de critères représentant les préférences d’agents qui vérifient certains axiomes. Il est par ailleurs important, et c’est ce que nous faisons ici, de signaler l’utilisation d’un certain nombre d’autres critères dont l’emploi est justifié par des considérations adaptées à certains problèmes de décision, mais qui n’ont généralement pas été construits à partir d’une représentation axiomatique des préférences de décideurs.

Voyons sur un petit exemple comment les différents critères que nous présentons comparent trois décisions dont les conséquences dépendent de trois états aléatoires.

Considérons trois investissements (a, b et c) dont les taux de rendement possibles, selon l’état qui se réalisera à l’échéance, sont :

— pour a : 10 % 20 % 30 % ;
— pour b : 4 % 25 % 30 % ;
— pour c : 5 % 15 % 50 %.

C’est volontairement que nous ne précisons rien sur la vraisemblance ou la probabilité d’occurrence de ces états, nous ne le ferons que lorsque certains critères le nécessiteront.

D’une manière générale, les critères affectent une valeur à une décision d, dont nous noterons $c_i(d)$ la conséquence dans l'état i (dans l'exemple : $c_1(a) = 10$, $c_2(c) = 15$, etc.). Nous supposerons qu'il y a un nombre fini d'états, soit n, quoique certains des critères puissent être définis pour un ensemble d'états plus général.

Historiquement, le critère dit « de Laplace » est sans doute le premier qui ait été proposé (bien avant Laplace et au moins par Huygens plus d'un siècle avant). Il intègre en une seule valeur les différentes conséquences possibles (ce sont des conséquences numériques) d'une décision dans l'incertain : il s'agit de la moyenne arithmétique des gains.

Critère de Laplace : $L(d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_i(d)$

Dans notre exemple :

$$L(a) = \frac{1}{3}(10 + 20 + 30) = 20$$

$$L(b) = \frac{1}{3}(4 + 25 + 30) = \frac{59}{3} < 20$$

$$L(c) = \frac{1}{3}(5 + 15 + 50) = \frac{70}{3} > 20$$

Le critère de Laplace range donc les décisions dans l'ordre croissant : c, a, b.

L'idée de prendre la moyenne arithmétique, qui correspond à une pondération uniforme, est justifiée par une absence d'information sur les probabilités des événements élémentaires (i = 1 … n). C'est aussi cette distribution de probabilité uniforme qui fut utilisée dans la première formulation de l'utilité espérée proposée par Cramer et Bernoulli (nous y reviendrons au chapitre V). À la différence du critère de Laplace, ce ne sont pas directement les conséquences numériques dont la moyenne est calculée, mais une fonction de ceux-ci, comme nous l'avons vu dans l'exemple traité au chapitre précédent. Cette fonction déforme les conséquences afin de traduire l'attitude de l'agent vis-à-vis de la richesse, ou, plus généralement, de conséquences numériques (les taux, dans notre exemple). De plus, ce critère peut être défini pour des conséquences qui ne sont pas numériques, puisque l'utilité de la conséquence, elle, est numérique (utilité d'un bien de consommation, par exemple).

Critère de Bernoulli : $B(d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U[c_i(d)])$

où U était la fonction logarithme

La fonction logarithme exprime qu'un accroissement de 1 euro pour une richesse de 1 euro est plus « utile » qu'un même accroissement de 1 euro pour une richesse de 100 euros. Cette propriété vient de ce que la fonction logarithme est « concave » ; la plupart des fonctions d'utilité utilisées le sont aussi pour la même raison.

Dans notre exemple :

$$B(a) = \frac{1}{3} (\mathrm{Ln}10 + \mathrm{Ln}20 + \mathrm{Ln}30) = \frac{1}{3} \mathrm{Ln}6\,000$$

$$B(b) = \frac{1}{3} (\mathrm{Ln}\ 4 + \mathrm{Ln}25 + \mathrm{Ln}30) = \frac{1}{3} \mathrm{Ln}3\,000$$

$$B(c) = \frac{1}{3} (\mathrm{Ln}\ 5 + \mathrm{Ln}15 + \mathrm{Ln}50) = \frac{1}{3} \mathrm{Ln}3\,750.$$

Le critère de Bernoulli range donc les décisions dans l'ordre croissant : a, c, b. Remarquons que a et c ont été inversés par rapport au rangement obtenu par le critère de Laplace, du fait que la fonction logarithme donne plus d'importance relative aux petites valeurs (qui sont plus importantes pour a que pour c).

Les critères de Laplace et de Bernoulli pondèrent également ($\frac{1}{3}$) les trois états. Toutefois, il est des situations où les probabilités des états sont connues ou du moins appréciées numériquement. Les deux critères qui suivent sont des versions probabilisées des deux critères précédents, ou, dit autrement, ces deux derniers sont des cas particuliers des suivants si les probabilités des résultats sont identiques : $\frac{1}{n}$.

En tenant compte d'une distribution de probabilité connue sur les différents états (p_i, probabilité de l'état i), le critère de Laplace devient le critère de l'espérance mathématique que nous avons utilisé au chapitre précédent.

Critère de l'espérance mathématique : $E(d) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, c_i(d)$

En tenant compte de l'utilité des conséquences, ce dernier critère devient celui de l'utilité espérée dont nous donnerons une justification axiomatique.

Critère de l'utilité espérée : $V(d) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, U[c_i(d)]$

Dans notre exemple, si les trois états étaient affectés des probabilités $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$, le critère de l'espérance mathématique donnerait :

$$E(a) = \frac{1}{2}(10) + \frac{1}{4}(20) + \frac{1}{4}(30) = \frac{70}{4}$$

$$E(b) = \frac{1}{2}(4) + \frac{1}{4}(25) + \frac{1}{4}(30) = \frac{63}{4}$$

$$E(c) = \frac{1}{2}(5) + \frac{1}{4}(15) + \frac{1}{4}(50) = \frac{75}{4}$$

Le critère de l'espérance mathématique, avec les probabilités que nous avons affectées aux états, rangerait donc les décisions dans l'ordre croissant : c, a, b.

En utilisant la fonction logarithme comme fonction d'utilité :

$$V(a) = \frac{1}{2}(\mathrm{Ln}10) + \frac{1}{4}(\mathrm{Ln}20) + \frac{1}{4}(\mathrm{Ln}30) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}60\,000$$

$$V(b) = \frac{1}{2}(\mathrm{Ln}4) + \frac{1}{4}(\mathrm{Ln}25) + \frac{1}{4}(\mathrm{Ln}30) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}12\,000$$

$$V(c) = \frac{1}{2}(\mathrm{Ln}5) + \frac{1}{4}(\mathrm{Ln}15) + \frac{1}{4}(\mathrm{Ln}50) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}18\,750$$

Le critère de l'espérance de l'utilité (ici, logarithmique) rangerait donc les décisions dans l'ordre croissant : a, c, b. Comme dans le cas des critères de Laplace et de Bernoulli, remarquons que l'ordre de a et c est inversé.

Les trois autres critères ne font pas intervenir de pondération, probabiliste ou pas, des états, mais sont concernés par les conséquences extrêmes [gain maximal M(a), gain minimal m(a), correspondant à chaque décision a)]. Ainsi le critère de Wald fera prendre une décision qui a le plus grand gain minimal, c'est-à-dire qui maximise le gain minimal, d'où aussi son nom de critère MaxiMin. Ce critère correspond à un comportement de prudence extrême vis-à-vis du risque et peut être justifié comme un cas limite d'utilité espérée.

Critère de Wald : $W(d) = \min \{c_i(d) / i : 1 \ldots n\}$

Dans notre exemple, le critère de Wald nous donne : W(a) = 10 ; W(b) = 4 ; W(c) = 5. Le critère de Wald range donc les décisions dans l'ordre croissant : a, c, b.

Le critère d'Hurwicz prend en compte à la fois le gain maximal et le gain minimal qu'il pondère par un paramètre k, qui est à déterminer par le décideur.

Critère d'Hurwicz : $H(d) = k\, M(d) + (1 - k)\, m(d)$

Le critère d'Hurwicz donne les valeurs suivantes aux décisions de l'exemple : H(a) = kx10 + (1 – k)x30 ; H(b) = kx4 + (1 – k)x30 ; H(c) = kx5 + (1 – k)x50. Le critère d'Hurwicz range les décisions dans l'ordre : c, a, b (ici, on peut le vérifier aisément, ce rangement reste valable quel que soit le paramètre $k < 1$).

Au lieu de ne considérer que les valeurs extrêmes, il est possible, pour le décideur, d'anticiper les « regrets » qu'il aurait en ayant pris une décision une fois que l'état de la nature est observé. Ces « regrets », qui sont des manques à gagner, aussi appelés coûts d'opportunité, sont calculés pour chaque décision en faisant les différences entre le gain réalisé dans chaque état et le gain maximal qui aurait pu être obtenu en prenant une autre décision :

$$r_i(d) = \mathrm{Max}\ \{c_i(d') / d' \in A\} - c_i(d)$$

(Le regret est nul si d est justement la décision qui présente le meilleur gain dans l'état i.) Le critère de Savage, dit aussi du « minimum-regret », conseille de choisir une décision qui minimise (jusqu'à présent tous les critères étaient à maximiser) le regret maximal.

Critère de Savage : $S(d) = \mathrm{Max}\ \{r_i(d) / i = 1 \ldots n\}$
(à minimiser)

Le critère de Savage, qui, au contraire de tous les précédents, est à minimiser, donne :
S(a) = Max {10 – 10 ; 25 – 20 ; 50 – 30} = 20

$S(b) = \text{Max}\ \{10 - 4\ ;\ 25 - 25\ ;\ 50 - 30\} = 20$
$S(c) = \text{Max}\ \{10 - 5\ ;\ 25 - 215\ ;\ 50 - 50\} = 10$

Le critère de Savage laisse donc les décisions a et b indifférentes, alors qu'il favorise c.

On aura pu apprécier sur cet exemple, extrêmement simple comparé aux problèmes d'investissement réels, combien un critère modifie la décision finale. Nous l'avions déjà remarqué dans le chapitre précédent où nous avions noté aussi la sensibilité des résultats à la spécification des probabilités. Dans les cas particuliers où ils ont été introduits, chacun de ces critères a reçu des justifications fondées, pour l'essentiel, sur l'expérience. La théorie de la décision cherche, pour sa part, à fonder ces justifications sur des conditions (axiomes) sur le comportement des décideurs.

La liste, non exhaustive, des critères précédents permet de prendre une décision en résolvant un simple programme d'optimisation. Cela vient de ce que la variabilité des conséquences d'une décision est complètement intégrée par ces critères. D'autres approches caractérisent les situations d'incertitude par deux critères, l'un représentant le rendement, l'autre le risque. À moins de se diriger vers des méthodes d'optimisation « multicritères » sur lesquelles nous reviendrons dans le paragraphe suivant, il est possible d'intégrer l'incertitude par des critères uniques qui agrègent les paramètres caractérisant l'incertitude. Le plus fameux de ceux-ci est sans doute celui qui est implicitement défini par la théorie de sélection de portefeuilles (ou, plus généralement, d'investissements) due à Markowitz [1970]. La théorie remonte à un article du même auteur paru en 1952. Le rendement d'un portefeuille est caractérisé par son espérance mathématique, et le risque qu'il présente est formalisé par la variance ou l'écart type des rendements aléatoires. Les investisseurs dont l'aversion pour le risque est caractérisée par leur désir de minimiser la variance (voir chapitre VI) doivent donc faire un arbitrage entre les deux critères que sont l'espérance : $\mu(d)$ et l'écart type $\sigma(d)$ du rendement d'un investissement d. Cet arbitrage peut être formalisé par une fonction des deux paramètres $U(\mu, \sigma)$. Ce critère peut être justifié par la théorie de l'utilité espérée dans le cas où l'utilité est une fonction quadratique des rendements ($U(r) = \alpha - \beta r^2$), ou encore dans le cas où la distribution de ceux-ci est complètement caractérisée par ses deux premiers moments (espérance et variance, comme c'est le cas pour la loi normale). Un tel critère ne tient pas compte des dissymétries de la distribution ni de valeurs critiques des rendements. Pour pallier ces défauts, Markowitz a proposé un critère agrégeant l'espérance des rendements et un paramètre ν(d*) mesurant la variabilité au-delà d'un seuil critique d*.

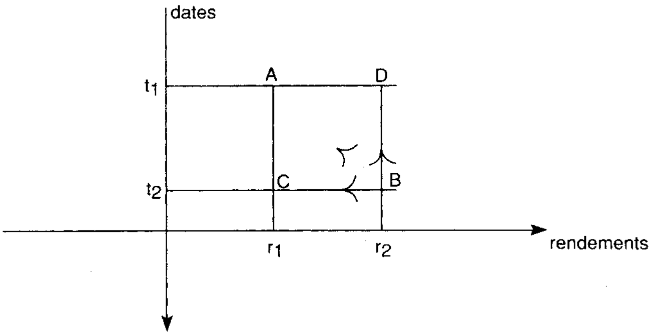
Le critère de Markowitz : U[μ(d), ν(d)]*

D'autres critères voudront, selon les cas, tenir compte de ce que l'espérance ou la variance ne sont pas des paramètres définis ou pertinents. Pour les remplacer, l'espérance peut être remplacée par le mode de la distribution (valeur la plus probable), ou par une valeur équivalente à la partie positive des gains. La mesure du risque peut être faite par la variabilité absolue (différence entre la plus haute et la plus basse valeur des rendements) ou par une valeur équivalente à la partie négative des gains, etc. Tous ces critères ont en commun le fait qu'ils agrègent deux critères, définis de manière pragmatique ; ils sont difficilement justifiables par une axiomatique, comme représentation des préférences des décideurs sur les conséquences de leurs décisions.

4. Préférences et critères

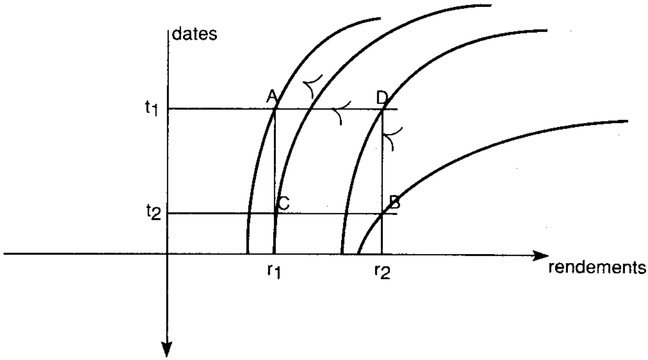
Les ensembles de conséquences sont souvent définis par des variables quantitatives mesurant certains caractères des décisions. Une conséquence est alors définie par un vecteur de valeurs correspondant, par exemple, à la tranche d'âge, à la taille, au rendement, etc. Chacun de ces caractères est ordonné naturellement par la relation de préférence et correspond, en fait, à une représentation partielle de cette relation. En pratique, les préférences sont donc généralement définies par des critères portant sur différents caractères, mais la multiplicité de ces critères laisse entière la difficulté de définir la relation de préférence dans sa globalité.

Considérons ainsi un ensemble de conséquences constitué de deux caractères, disons une date et un rendement monétaire. Sur la première composante, c'est-à-dire pour une valeur donnée du rendement, les préférences vont dans l'ordre décroissant des dates : la date la plus proche est celle qui est préférée. Sur le second critère, les préférences vont dans l'ordre décroissant des valeurs. Mais la connaissance de ces deux critères ne suffit pas à comparer toutes les conséquences comme on le voit sur le graphe suivant :



Les conséquences A et B sont clairement rangées : B est préférée à A puisque la date t_2 est inférieure donc meilleure que la date t_1, et que le rendement r_2 est supérieur donc meilleur que le rendement r_1. De même B est préférée à C puisque, à date égale, elle présente un rendement supérieur, et B est préférée à D puisque, à rendement égal, elle est disponible à une date plus proche. A est comparable de la même manière à C et à D ; en revanche, C et D ne sont pas comparables sur la seule base des critères sur leurs composantes. En effet, D est préférée à C en termes de rendement, mais c'est l'inverse en ce qui concerne la date. Pour définir les préférences sur les couples date-rendement, les deux critères ne nous suffisent donc pas. Une relation de préférence sera définie globalement en comparant tous les couples. Des courbes rejoignant tous les couples indifférents entre eux (appelées « courbes d'indifférence ») établiront un rangement des couples, comme le montre le graphe page suivante.

Avec une relation de préférence complétée par les courbes d'indifférence (dont seules celles correspondant aux conséquences A, B, C, D, sont représentées), il apparaît que la conséquence D est préférée à la conséquence C (puisque, à la date 0, le rendement du point situé sur la courbe des conséquences indifférentes à D est supérieur à celui du point correspondant de la courbe d'indifférence de C). Pour une telle relation de



préférence, une représentation est facile à définir : à tous les points d'une courbe d'indifférence, on peut affecter le rendement (ou une fonction croissante du rendement) de l'intersection de cette courbe avec l'axe horizontal de la date 0. Ainsi la relation de préférence est représentée par un critère unique qui est cohérent avec les deux critères sur les composantes.

La difficulté à définir la relation de préférence ou sa représentation, à partir des deux critères sur les composantes, vient de la multiplicité de possibilités d'agrégation de deux critères en un critère unique. Parmi ces agrégations possibles, certaines vérifieront les préférences du décideur, d'autres non, et l'utilisation d'un critère unique ne peut se faire que sur la base de l'observation des préférences du décideur.

5. Aides multicritères à la décision

Les nombreuses techniques d'optimisation multicritères pourraient laisser croire que le problème de la représentation des préférences par un critère unique peut être évité. Certaines de ces techniques, telles les méthodes « multiattributs » (Keeney et Raiffa [1976] ; Vincke [1989]), permettent de résoudre des programmes qui fournissent des solutions satisfaisant les différents critères à respecter. Toutefois, ces programmes sont établis sur la base de combinaisons linéaires des différents critères (en général, certaines méthodes sophistiquées utilisant des fonctions non linéaires). De telles combinaisons sont donc, de fait, des agrégations de critères, elles doivent être justifiées par des théories axiomatiques sur les préférences. Ces théories sont beaucoup plus restrictives encore que celles dont nous poursuivrons la présentation dans les chapitres suivants puisqu'elles les utilisent et les complètent.

D'autres méthodes s'attachent bien à faire révéler les préférences des décideurs et à les représenter par une relation dite de « surclassement » qui ne vérifie généralement pas l'axiome A_0 qui requiert que toutes les conséquences soient comparables (voir, plus haut, le paragraphe 2). Les préférences ne sont souvent, en effet, ni totales ni transitives. Les méthodes de surclassement (Roy [1985]) font cependant intervenir dans leur exploitation des pondérations de critères qui permettent de ne pas se limiter à des solutions non dominées (une conséquence est dominée par une autre si elle est moins bonne pour tous les critères). La définition de ces pondérations ne va sans doute pas aussi loin que l'agrégation de critères utilisés dans les méthodes « multiattributs ». Celles-ci posent pour axiome que les décideurs cherchent à optimiser une fonction agrégeant les critères. Cette fonction a pour effet de préciser les différents caractères à prendre en compte dans le problème de décision. Dans la pratique, cette fonction est linéaire, c'est-à-dire qu'en fait elle pondère les différents critères. La linéarité d'une telle fonction est assurée par des axiomes précisant une indépendance des différents critères, de tels axiomes sont à rapprocher des axiomes d'indépendance que nous rencontrerons par la suite pour assurer la linéarité des critères représentant les préférences des agents (voir aussi les paragraphes 6 et 7 plus loin).

Sans avoir recours à une agrégation de critères, des précisions sur les préférences du décideur peuvent amener à définir un ordre total sur des conséquences à partir des critères sur leurs composantes. Un exemple classique est celui de l'ordre lexicographique [1] qui suppose une prédominance de certains critères sur d'autres. Ainsi dans notre exemple sur les couples date-rendement, un ordre lexicographique pourra être établi si le rendement domine la date : les couples sont d'abord rangés par ordre de rendements croissants, puis parmi les couples de

1. L'ordre lexicographique tient son nom de l'analogie avec l'ordre du dictionnaire : les mots sont comparés en prenant d'abord la première lettre (premier critère) puis la deuxième, etc.

mêmes rendements, les dates sont comparées. Cela définit un ordre total sur les couples, tous peuvent être comparés : ainsi D est préféré à C puisque son rendement est supérieur, B est préféré à D puisque, à rendement égal, D a une date supérieure. L'ordre est donc B, D, C, A. Toutefois, il est possible de démontrer que cet ordre (qui vérifie l'axiome A_0) ne peut pas être représenté par une fonction (parce qu'il ne vérifie pas l'axiome A_1).

6. Agrégation des critères de différents décideurs

La multiplicité des critères et leur agrégation posent un problème pour la représentation d'une relation de préférences qui résume ou agrège celles de décideurs multiples. Ce problème est au centre des théories du choix social où une agence centrale (un gouvernement, par exemple) doit prendre une décision qui satisfasse au mieux un ensemble d'agents économiques dont les préférences diffèrent. Les fondements théoriques de l'*utilitarisme* consistent à trouver des conditions sur les préférences des agents qui justifient leurs représentations par des fonctions dites d'« utilité » et surtout l'agrégation de ces fonctions d'utilité en une seule fonction, dite de « choix social ». L'utilitarisme exige de plus que la fonction de choix social soit combinaison linéaire des fonctions d'utilité individuelle. Pour cela, des axiomes devront être vérifiés par les préférences qui assurent la linéarité de la fonction qui les agrège ; il s'agit ici aussi d'axiomes imposant une certaine indépendance des critères individuels ; de tels axiomes ont la même portée normative et la même limite descriptive que ceux utilisés par la théorie de l'utilité multiattributs.

Un exemple classique montre bien l'importance de ces difficultés, il a été rendu célèbre par Condorcet (né marquis en 1743, mort ci-devant en 1794) qui, en proposant une solution, s'est trouvé face à un paradoxe.

Le choix entre trois candidats à une élection (ou entre trois décisions) est établi par 60 votants (ou décideurs différents). Appelons A, B et C ces candidats et demandons à chaque votant comment il les ordonne. Les candidats se répartissent de la manière suivante sur quatre rangements possibles :

Nombre de votants	*23*	19	*16*	*2*
En tête	A	B	C	C
En second	B	C	B	A
En dernier	C	A	A	B

En utilisant la règle de la majorité, A est en tête (23 voix). Pourtant, s'il était en ballottage contre un seul candidat, il perdrait contre B (19 + 16 pour B contre 23 + 2 pour A) et contre C aussi (19 + 16 + 2 pour C contre 23 pour A). Condorcet propose une règle qui tienne compte de ces combinaisons d'opinions en proposant de se fonder sur le rangement des trois candidats le plus probable au sens suivant :
— B gagne sur A 35 fois contre 25 ;
— C gagne sur A 37 fois contre 23 ;
— C gagne sur B 41 fois contre 19.

Le rangement le plus probable est donc : C, B, A. Ce qui donne C comme vainqueur, C est appelé le « gagnant de Condorcet ». (Remarquons que C serait aussi le vainqueur s'il était élu selon un système proportionnel fondé sur l'attribution de deux points chaque fois qu'il est classé premier, un point quand il est classé second et zéro sinon.) Le problème, c'est que le gagnant de Condorcet n'existe pas toujours, comme le montre la répartition de votants suivante :

Votes	*23*	*17*	*2*	*10*	*8*
Premier	A	B	B	C	C
Second	B	C	A	A	B
Dernier	C	A	C	B	A

A gagne contre B 33 fois contre 27 ; B gagne contre C 42 fois contre 18 ; C gagne contre A 35 fois contre 25.

Ce cycle, intransitivité de la règle, est connu sous le nom de *paradoxe de Condorcet*, qui, pour le résoudre, a proposé la solution suivante : couper le cycle en son point le plus faible ; ici, c'est A contre B, ce qui donne B comme gagnant.

La difficulté à trouver une procédure de décision, ou des préférences sociales, à partir de celles d'agents différents a été clairement mise en évidence par le théorème d'impossibilité d'Arrow. Kenneth Arrow a en effet montré que, sous des conditions qui semblent indiscutables pour une Constitution démocratique, il n'est pas possible de trouver une règle de choix social (c'est-à-dire une règle que pourrait suivre un gouvernement, par exemple) qui soit cohérente avec les préférences des individus concernés par cette Constitution. Ces conditions peuvent être exprimées de la manière suivante : on considère un ensemble de conséquences possibles sur lequel sont définies des relations de préférences des différents individus concernés par une Constitution à déterminer qui définira une relation de préférences sociales. L'intérêt de ce théorème vient de ce qu'il s'adresse à une population mal définie, comme c'est le cas pour un pays, pour laquelle il serait illusoire de chercher à faire une liste exhaustive de tous les habitants.

Uniformité : la Constitution respecte toutes les relations de préférences possibles sur l'ensemble des conséquences.

Monotonie : si une conséquence, x, est préférée à une autre, y, pour une relation de préférences sociales et si l'on propose une nouvelle relation de préférences sociales pour laquelle x satisfait plus l'un des agents et n'en désatisfait aucun autre, alors x est socialement préféré à y dans la nouvelle relation de préférences sociales.

Indépendance : deux relations de préférences sociales qui procèdent au même rangement des conséquences pour tous les individus déterminent le même choix social.

Absence de contrainte : la Constitution n'est pas contrainte par une paire de conséquences pour laquelle le choix social soit le même pour toute relation de préférences sociales.

Absence de dictateur : la Constitution ne définit pas la relation de préférences sociales comme étant la relation de préférences (strictes) d'un individu (qui serait alors un dictateur).

Théorème d'impossibilité d'Arrow : il n'existe pas de Constitution qui vérifie les cinq conditions précédentes.

Moralité : à moins d'être un dictateur (celui qui dicte les décisions à prendre), un décideur public ne peut se référer à la théorie de la décision individuelle pour guider ou justifier des choix dont les conséquences sont collectives.

7. Dynamique de décisions

Nous avons vu, dans l'exemple du chapitre précédent, deux manières de traiter un problème dynamique et nous avons constaté que les solutions ne sont pas toujours les mêmes. Lorsque les conséquences d'un problème de décision diffèrent dans le temps, la définition d'une relation de préférence globale, intertemporelle donc, peut poser des difficultés. Il s'agit encore dans ce cas d'agréger, en un seul critère portant sur la séquence des conséquences, des critères portant chacun sur les conséquences instantanées. (Dans notre exemple du chapitre III, nous avons supposé que le critère était le même : espérance des profits ou de leurs utilités, et que le critère global, aussi, était le même. Mais la fonction d'utilité du décideur pourrait fort bien changer au cours du temps et en fonction de ses informations, par exemple, le décideur pourrait être remplacé en deuxième période selon les résultats de sa stratégie.)

Le principe de la programmation dynamique consiste à calculer une suite optimale de décisions à partir de sous-suites optimales. Ainsi, pour une suite de décisions à horizon fini, on calculera la décision optimale concernant la dernière période en fonction de la décision de l'avant-dernière période, puis celle-ci en fonction de la décision précédente et ainsi de suite jusqu'à la décision initiale. Ce calcul se fait en optimisant à chaque période le critère de décision instantané. Ce critère doit donc être connu dès le départ, et le calcul n'est valable — en ce sens que la suite de décisions ainsi calculée est optimale pour le décideur — que dans la mesure où les préférences sur les suites de décisions sont représentées par un critère qui se décompose selon les critères utilisés en chaque période. Inversement, cela suppose que le critère global est une agrégation des critères instantanés. Cette décomposition, ou cette agrégation, suppose donc une cohérence entre les préférences sur les conséquences en chaque période et les préférences sur les suites de décisions. Réciproquement, comme en pratique ce sont les critères instantanés qui sont connus plutôt que le critère global, le problème est de savoir quelles conditions doivent vérifier les préférences pour qu'une agrégation (combinaison linéaire en particulier) des critères représente bien les préférences sur les suites de conséquences.

Dans l'exemple du chapitre précédent, nous avions (habilement) évité ces difficultés en ne considérant que les profits à la période finale. Dans la pratique, les gains et les pertes intermédiaires sont à gérer aussi ; en chaque instant, un profit réalisé (positif ou négatif) nécessite un placement ou un emprunt ou pour le moins une évaluation à la période finale (profit actualisé, par exemple).

Conclusion

Ce chapitre a pu avoir un effet décourageant ! Nous n'avons fait qu'y exposer des difficultés et mettre en garde le lecteur contre un optimisme que les exemples traités auraient pu laisser naître. Prendre des décisions n'est pas devenu facile parce qu'un corps de recherche a pu construire des théories. Toutefois, ces théories servent de guides et se sont avérées utiles. Comment construire un critère qui correspond aux préférences d'un décideur dans des situations de risque ? Nous allons le voir au chapitre suivant, et, s'il ne peut pas être utilisé, nous en verrons d'autres au chapitre VIII. Comment utiliser ce critère pour mesurer le risque et tenir compte du comportement du décideur ? C'est ce dont traite le chapitre VI. Mais il faut bien faire des statistiques pour évaluer les probabilités, et la théorie justifie aussi certaines pratiques statistiques, car, là comme ailleurs, il y a des décisions à prendre, nous le verrons au chapitre VII. La théorie de la décision ne se contente pas de mettre en lumière des difficultés, elle apporte aussi quelques réponses !

V / Le critère de l'utilité espérée

Les critères que nous avons énumérés dans le chapitre précédent ont été élaborés sur la base de considérations pratiques. Le critère de l'utilité espérée a ceci de particulier qu'il a été construit de manière théorique par von Neumann et Morgenstern [1944]. Son ancêtre, le critère de Bernoulli (Daniel Bernoulli [1738]), avait déjà été le fruit d'une réflexion ayant pour but d'expliquer le comportement de décideurs face à certains jeux de hasard, mais sa formulation ne découlait pas de conditions (d'axiomes) sur le comportement des décideurs.

Bien que la théorie de l'utilité espérée n'ait été développée que dans le cadre de « situations de risque » (les probabilités sur les conséquences sont connues), ses principes sont entrés dans la pratique courante de l'analyse de problèmes de décision dans des environnements incertains plus généraux. De ce fait, ses méthodes sont utilisées, parfois de manière abusive, dans des situations qui n'ont que peu de similitudes avec des situations de risque, cela essentiellement pour deux raisons.

D'une part, l'attrait naturel qu'exerce la théorie des probabilités comme outil de description et d'analyse de l'incertitude à laquelle fait face un décideur (ou dans un jeu, un joueur) incite à décrire l'incertitude en termes de mécanismes aléatoires. D'autre part, une tendance générale à la simplification des problèmes de décision, à savoir l'élaboration d'un critère de décision qui soit unique et qui élimine l'incertitude, conduit à privilégier un critère simple comme celui de l'utilité espérée.

Ce critère est construit à partir de conditions (postulats ou, encore, axiomes) sur le comportement des décideurs. Il n'est applicable qu'à des décideurs dont les préférences en vérifient les postulats et qui se trouvent dans des situations de décision dans l'incertain particulières : ce sont des situations de risque ou des situations qui s'y ramènent, en un sens que nous allons préciser.

1. Situations de risque et situations qui s'y ramènent

Bien qu'il s'agisse dans les deux cas de jeux de hasard, il est courant d'opposer la situation où se trouve un parieur face à un jeu de roulette à celle où il se trouve face à une course de chevaux. La première est une situation de risque pour laquelle le formalisme de la théorie des probabilités est parfaitement adapté, la seconde une situation qui peut s'y ramener. Dans un jeu de roulette, le hasard est engendré par un phénomène physique, reproductible, qui permet de définir la vraisemblance d'un événement et de la mesurer par une fréquence observable. Dans une course de chevaux, l'expérience qui engendre le hasard n'est pas reproductible parce qu'elle fait intervenir de trop nombreux facteurs ; de ce fait, la notion de mesure de la vraisemblance d'un événement reste subjective. Parmi ces facteurs, les plus évidents sont les chevaux, qui, tout dressés et entraînés qu'ils soient, sont sujets à d'innombrables variations biologiques dont dépendent leur condition physique et, par conséquent, leur probabilité de gagner.

En pratique, peu de décisions sont prises en situation de risque (probabilités connues). Les décisions d'investissement sur un marché boursier, par exemple, font intervenir une incertitude sur les cours futurs dont la distribution de probabilités n'est pas connue. Il est communément admis que cette distribution, ou du moins certains de ses paramètres, peuvent être déduits des observations des cours passés. En fait, ni les cours passés ni les cours futurs ne correspondent à la répétition d'une expérience aléatoire, en ce sens qu'ils ne sont pas obtenus par la répétition d'une expérience reproductible (en partie pour la raison que, parmi les éléments d'incertitude de chaque agent, figurent les décisions et les anticipations des autres agents concernant le futur). Cette remarque est facilement transposable à la plupart des décisions prises par des gestionnaires : achats d'immeubles, implantations de points de vente, lancements de produits nouveaux, etc., et, plus encore, aux problèmes de décision dont les conséquences sont difficiles à définir : décisions politiques, relations sociales, etc.

Toutefois, lorsqu'une première approche du problème de décision a permis au décideur de résumer les informations dont il dispose sous la forme d'une distribution de probabilités sur les conséquences, le problème de décision se ramène à une situation de risque. Ce que nous entendons par cette expression, c'est que le choix du décideur se ramène à celui d'une distribution de probabilités sur les conséquences de sa décision, comme c'est le cas pour un pari sur un jeu de roulette ou sur une loterie.

Considérons, dans un jeu de roulette, le choix entre miser 10 euros sur le 12 ou la même somme sur « Pair ». Les gains possibles sont 360 euros pour le premier choix, 20 euros pour le second, la perte possible étant de 10 euros dans les deux cas ; les conséquences possibles sont donc : 360, 20, – 10.

La roulette comportant 37 alvéoles, le 12 sort avec une probabilité de 1/37 et « Pair » avec une probabilité de 18/37 (le 0 n'étant pas compté parmi les nombres pairs). Choisir de miser sur le 12 correspond donc à choisir la distribution de probabilité sur les conséquences : 1/37 sur 360 ; 0 sur 20 ; 36/37 sur – 10. Choisir de miser sur « Pair » correspond à choisir la distribution de probabilité sur les conséquences : 0 sur 360 ; 18/37 sur 20 ; 19/37 sur – 10.

Considérons à présent une course de chevaux, et le choix entre miser 10 euros soit sur le cheval numéro 12 (placé à 36 contre 1), soit sur le cheval numéro 5 (placé à 2 contre 1). Les conséquences possibles de ces choix sont encore 360, 20 et – 10. Le premier choix aura pour conséquence : 360, si le 12 gagne ; – 10, sinon, et il ne pourra pas avoir 20 comme conséquence.

Le second choix aura pour conséquence : 20, si le 5 gagne ; – 10, sinon et il ne pourra pas avoir 360 comme conséquence.

Ces choix ne correspondent donc pas à des distributions de probabilités sur les conséquences possibles. Cependant, si le joueur pense que le cheval numéro 12 va gagner avec une probabilité de 1/36 ($\cong$ 1/37), et que le cheval numéro 5 va gagner avec une probabilité de 1/2 ($\cong$ 18/37), le choix se ramène effectivement à une situation extrêmement semblable à celle où le joueur se trouvait dans le jeu de roulette. La mesure de la vraisemblance des événements établie par le parieur prend les mêmes valeurs que les probabilités précédentes ; aussi, au choix de chaque pari, correspond une distribution de probabilités sur les conséquences possibles (complétées par la probabilité zéro sur la conséquence impossible : 20 s'il mise sur le 12, 360 s'il mise sur le 5). Ainsi, bien que les deux paris soient faits dans des situations d'incertitudes très différentes, il est possible, pour certains parieurs, de les ramener toutes deux à des situations de risque.

Formellement, un problème de décision est dit en situation de risque si, à chaque action choisie, correspond une distribution de probabilités sur les conséquences.

Un problème de décision en situation de risque pourra alors être représenté par la donnée d'une fonction, c, qui associe à chaque action, a, de l'ensemble A des actions possibles et à chaque résultat, ω, de l'ensemble Ω des résultats d'une expérience aléatoire régie par une distribution de probabilités donnée, une conséquence, c(a,ω), de l'ensemble C des conséquences possibles c : Ax´ → C. A la roulette, Ω est la liste des numéros de 0 à 36 et la distribution de probabilité est (en principe !) uniforme : 1/37 pour chaque numéro.

À chaque action, a, (parier sur le 12) correspond la distibution image (1/37 sur 360 ; 0 sur 20 ; 36/37 sur – 10) de la distribution sur Ω (1/37 sur chaque numéro) par la fonction (variable aléatoire) c (a, .) : Ω → C. Dans notre exemple :

c(« parier sur le 12 », ω) = 360 si ω = 12
– 10 si ω ≠ 12.

Dans l'exemple des paris sur la roulette, la fonction, c, est définie par le règlement du jeu qui fixe les gains en fonction de la somme misée sur les différentes combinaisons de numéros (les actions), et les résultats désignés par la roulette (les résultats de l'expérience aléatoire). La distribution de probabilités sur les événements de cette expérience est définie par la distribution uniforme (1/37 sur chacun des 37 résultats possibles). À chaque pari correspond une distribution sur les gains ou les pertes (conséquences) ; par exemple, au pari : « miser 10 euros sur Pair » correspond la probabilité : 18/37 de gagner 2 × 10 euros et 19/37 de perdre 10 euros.

Dans l'exemple des paris sur les courses de chevaux, la fonction c est aussi définie par le règlement du jeu qui fixe les gains en fonction des montants misés (lorsque les cotations dues aux paris des autres joueurs sont déjà données) et du résultat de la course. La distribution de probabilités sur ces résultats et, par conséquent, celle sur les gains ou pertes, sont définies par le parieur lui-même en fonction de ses informations et de son intuition.

Lorsque les cotations ne sont pas données, la distribution sur les conséquences dépend encore d'un nouveau facteur : les actions inconnues des autres joueurs. Cela ne change rien à notre formalisme si ce n'est que les résultats aléatoires seront formés de deux composantes : l'une résultant de la course, l'autre du comportement des autres joueurs.

Une situation de risque est donc caractérisée par une distribution connue sur l'ensemble des aléas. Dans certains cas, cette distribution peut dépendre de la décision du joueur lui-même, son pari changeant les cotations, et, par conséquent, les gains. Le joueur prend, dans ce cas aussi, sa décision dans une situation de risque puisque chacun de ses choix définit une distribution sur les conséquences. La manière dont cette distribution est définie est certainement plus complexe que dans le cas simple de paris sur le jeu de roulette, mais ce qui nous importe ici est que le joueur la considère comme donnée, et donc que la situation se « ramène à une situation de risque ».

Le principe fondamental de la théorie de l'utilité espérée est qu'en situation de risque le comportement du décideur est entièrement déterminé par ses préférences sur les distributions de probabilités sur les conséquences de ses actions.

Il est d'usage d'appeler « loteries » de telles distributions, qu'elles proviennent ou non d'une loterie sur les résultats d'une expérience aléatoire. En situation de risque, donc, le comportement du décideur est entièrement défini par ses préférences sur les loteries (si, à la roulette, un joueur préfère la distribution 1/37 sur 360 et 36/37 sur – 10 à la distribution 1/2 sur 2 et 1/2 sur 0, il misera sur le 12 plutôt que sur « Pair », par exemple).

Dans une telle situation un décideur est appelé « rationnel » si le choix de ses décisions est cohérent avec ses préférences sur les loteries. Ainsi, si à l'action a correspond la loterie l et à l'action a' correspond la loterie l', un agent rationnel choisira a plutôt que a', s'il préfère l à l'.

La théorie de l'utilité espérée est une théorie de la représentation des préférences sur les loteries. Elle permet de définir un critère grâce auquel les loteries peuvent être comparées : c'est leur utilité espérée. Un décideur dont les préférences sur les loteries vérifient les conditions de la théorie (ses axiomes) dispose alors d'un critère qui permet de les comparer. Puisque chacune de ses décisions est associée à une loterie, le même critère lui permettra de ranger ses décisions, s'il est « rationnel ».

Revenons sur le problème de décision traité au chapitre III, p. 30 : nous avions comparé la décision prise en utilisant le critère du profit espéré et celle obtenue à partir de l'espérance d'une fonction d'utilité particulière. La distribution de probabilités était connue : nous étions bien en situation de risque. Le décideur et nous, qui nous mettions à sa place, avons calculé les probabilités des différents profits selon les décisions prises. Là, nous avons sauté une étape : nous avons déclaré que le décideur rangeait ces profits aléatoires (ces loteries dans notre terminologie actuelle) en utilisant le critère du profit espéré (ou, en nous ravisant, celui de l'utilité du profit espéré), d'où se déduisait une décision optimale. L'étape sautée consiste à justifier le critère employé ; ce chapitre nous donne des moyens de le faire.

Dans une situation de risque ou une situation qui s'y ramène, c'est-à-dire qui ramène le choix d'une action à celui d'une loterie sur les conséquences des décisions, un décideur dont les préférences sur les loteries vérifient les axiomes de la théorie de l'utilité espérée sera rationnel s'il choisit une action qui maximise l'espérance de l'utilité de la loterie sur les conséquences qui correspond à cette action.

La théorie de l'utilité espérée, comme les autres théories de représentation du comportement, consiste à établir des normes sur les préférences qui permettent de construire des critères de choix. Un comportement rationnel sera alors celui d'un décideur qui reconnaît ces normes et qui prend ses décisions selon le critère qu'elles ont permis de définir.

2. Représentation des préférences sur des loteries

Nous avons vu au chapitre précédent ce que sont des critères et ce que signifie : représenter des préférences par un critère. Les préférences que nous cherchons à représenter portent ici sur des loteries sur les conséquences. Nous savons d'ores et déjà que les deux axiomes que nous avons présentés au chapitre précédent doivent être vérifiés. Le premier axiome (A_0) porte sur la comparabilité de toutes les conséquences, ici les loteries sur les conséquences. Le second (A_1) porte sur une propriété mathématique dite « de continuité ».

La richesse structurelle de l'ensemble des loteries a permis d'exprimer une autre propriété de la représentation des préférences : c'est celle que nous appellerons « linéarité » ; elle provient de la structure algébrique de l'ensemble des loteries. Cette propriété, mathématique, traduit une intuition ancienne qui consiste à considérer qu'une loterie dont les lots sont monétaires est équivalente à une somme de monnaie obtenue sans incertitude : cette somme correspond au prix maximal qu'un joueur est prêt à payer pour jouer à cette loterie. Ce prix, l'intuition première veut que ce soit celui du lot moyen, c'est-à-dire la moyenne arithmétique des lots pondérés par leurs probabilités d'être gagnés (le critère de Laplace, ou, plus généralement, celui de l'espérance mathématique du gain). Mathématiquement, le calcul du lot moyen correspond bien à une propriété de linéarité puisque c'est une somme pondérée (une combinaison linéaire).

Mais le *paradoxe de Saint-Pétersbourg*, présenté au XVIIIe siècle, met en évidence la contradiction de l'intuition première avec le comportement d'un joueur : aucun joueur ne risquerait toute sa fortune dans un jeu, même si le gain espéré est infiniment grand. Miseriez-vous toute votre fortune dans le jeu suivant ?

On jette une pièce de monnaie jusqu'à ce que face apparaisse. Si face apparaît pour la première fois au nième jet, vous gagnez 2^n euros (moins la somme misée) : par exemple, si vous aviez misé 10 € et si face apparaissait la première fois, vous perdriez 10 – 2 = 8 € (avec probabilité $\frac{1}{2}$), mais, si face n'apparaissait qu'à la septième fois (avec probabilité $\frac{1}{2^7} = \frac{1}{256}$), vous gagneriez 256 – 10 = 246 €. Le gain espéré de ce jeu est infini ; en effet la probabilité que face apparaisse au nième jet est $\frac{1}{2^n}$ et le gain espéré (mise exclue) est donc :
$\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2^2} \times 2^2 + \ldots + \frac{1}{2^n} \times 2^n + \ldots = 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ qui est infini !

L'hypothèse suggérée par Cramer à Bernoulli pour résoudre ce paradoxe est que, si vous n'êtes prêt à miser qu'une somme finie, disons 100 euros, pour jouer à ce jeu, c'est que cette somme ne correspond pas au gain espéré mais à l'espérance d'une fonction de ce gain. C'est cette fonction qui traduit une certaine forme de votre aversion pour le risque (risque de perdre toute votre fortune pour ne gagner que deux euros), parce que c'est une fonction qui croît de moins en moins vite avec le gain (en particulier la fonction logarithme a cette propriété). Ainsi, si U est cette fonction :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \times U(2^n) = 100.$$

La fonction U est appelée utilité du gain et le nombre 100 est le prix que vous seriez prêt à payer pour jouer à ce jeu. Ce prix, comme on le voit dans la formule, est une fonction linéaire des probabilités des gains. Cette fonction, qui associe un nombre à chaque loterie, est appelée « index de Bernoulli » ; elle représente les préférences d'un agent sur les loteries, et c'est une fonction linéaire des probabilités. Cette propriété de linéarité, qui est fondamentale dans la théorie de l'utilité espérée, est obtenue pour des préférences sur les loteries qui possèdent une propriété correspondante. L'axiome de linéarité, souvent appelé aussi axiome d'indépendance, que l'on trouvera au paragraphe suivant, exprime cette propriété.

3. Axiomes et existence du critère de l'utilité espérée

Nous présentons ici d'une manière assez peu formelle un système d'axiomes sur lequel est fondée la théorie de l'utilité espérée. Le but de ce paragraphe est d'exprimer des conditions que devront vérifier les préférences d'un agent sur des loteries pour qu'elles puissent être représentées par une fonction numérique qui ait les propriétés précisées au paragraphe précédent. Nous appellerons dorénavant cette fonction V.

Nous avons déjà exposé les deux premiers axiomes sous une forme générale au chapitre précédent ; nous les présentons ici en termes de préférences sur les loteries.

A_o : Les préférences définissent un ordre total sur les loteries

Cela signifie que toutes les loteries peuvent être comparées et rangées. Étant donné deux loteries l et l', soit l est préférée à l', soit l' est préférée à l, soit ni l'un ni l'autre. Dans ce dernier cas, on dira que l et l' sont indifférentes. L'axiome exprime que l'indifférence est une relation d'équivalence (voir encadré « Préordre », p. 46) et que les classes d'équivalence sont ordonnées par les préférences. Ainsi, si les loteries étaient en nombre fini, on pourrait les ranger selon l'ordre croissant des préférences, il suffirait alors de les numéroter pour avoir une représentation des préférences. La fonction V « représentant » les préférences associerait un indice à chaque loterie. Toutefois, l'ensemble des loteries sur un ensemble de conséquences est généralement un ensemble beaucoup plus « grand » qu'un ensemble fini [1] et un axiome complémentaire est nécéssaire pour représenter un ordre sur cet ensemble. Il s'agit d'un axiome de continuité qui donne aussi une propriété de continuité à la fonction V. L'axiome exprimant la propriété de continuité des préférences sur les loteries sera facile à comprendre sur un cas particulier où il y a trois conséquences a = – 10, b = 1 et c = 10 : supposons que vous préfériez la loterie qui donne b avec certitude à toutes les suivantes :

— b avec probabilité 1/2, a avec probabilité 1/4, c avec probabilité 1/4 ;
— b avec probabilité 1/3, a avec probabilité 1/3, c avec probabilité 1/3 ;
— b avec probabilité 1/4, a avec probabilité 3/8, c avec probabilité 3/8 ;
— b avec probabilité 1/5, a avec probabilité 2/5, c avec probabilité 2/5 ;
— … ;
— b avec probabilité 1/n, a et c avec probabilités 1/2(1 – 1/n) ;
— etc.

Lorsque n est grand (n = 100 pour fixer les idées), la loterie qui donne b avec probabilité 1/n est quasi équivalente à (elle a pour limite) celle qui donne b avec probabilité 0 et a et c avec probabilité 1/2 chacun. L'axiome de continuité implique que vous devez alors préférer la conséquence b (qui est identique à obtenir b = 1 avec certitude) à la loterie qui donne a = – 10 et c = 10 avec probabilité 1/2 chacun.

1. Même s'il n'y a que deux conséquences, tout nombre p compris entre 0 et 1 définit une loterie : la première conséquence est obtenue avec la probabilité p, la seconde avec la probabilité 1 – p.

Cet axiome peut être exprimé ainsi :

A_1 : pour toute loterie l, si toutes les loteries d'une suite l_n de loteries sont préférées à l et si cette suite admet une limite l_o, alors cette limite est préférée à l.

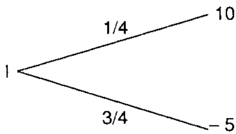
Les loteries « dégénérées » qui donnent la probabilité 1 à une conséquence sont des cas particuliers de loteries. Soit c une conséquence, il est d'usage de considérer cette conséquence c comme la loterie dégénérée qui donne la probabilité 1 à c et d'écrire U(c) au lieu de V(c). La fonction U ainsi définie est la restriction de la fonction V aux loteries dégénérées, on l'appelle *fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern*, réservant à la fonction V le nom d'*index de Bernoulli*.

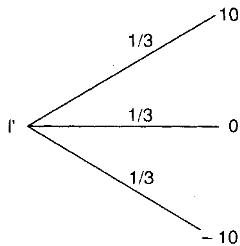
Nous avions déjà rencontré les deux axiomes précédents au chapitre III dans le cadre général de la représentation de préférences sur un ensemble de conséquences, que ce soit sur des loteries, des nombres ou n'importe quels objets dont l'ensemble permette d'exprimer l'axiome A_1. Le troisième axiome est particulier aux préférences sur les loteries, il permet de calculer la fonction V à partir de la fonction U pour les agents dont les préférences le vérifieraient. C'est donc grâce à cet axiome que nous pourrons justifier qu'un décideur maximise, dans le cas d'une distribution de probabilité uniforme, par exemple : la moyenne empirique des conséquences (critère de Laplace : U est l'identité, V est la moyenne empirique) ou la moyenne empirique des utilités (définie par U) des conséquences. Dans le cas d'une distribution de probabilité plus générale, nous trouverons l'espérance mathématique (V) de l'utilité (U) des conséquences.

Le troisième axiome donne à la fonction V une propriété de linéarité. Il peut être interprété comme une condition d'indépendance des préférences par rapport aux lots des loteries, d'où son nom d'axiome d'indépendance. C'est l'axiome le plus controversé de cette théorie, comme nous le verrons au chapitre VIII (paradoxe d'Allais).

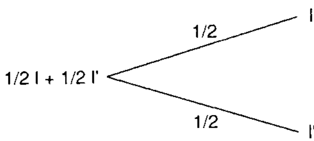
Dans cet axiome, nous utilisons des « loteries composées » : il s'agit de loteries dont les lots sont eux-mêmes des loteries. Nous avons rencontré cette situation dans l'exemple des forages successifs du chapitre III : la stratégie qui consiste à faire le premier forage, puis, dans le cas où le résultat est douteux, le second, définit une loterie composée sur les conséquences. À la décision de faire le premier forage correspond une loterie (résultat aléatoire) dont les lots sont les décisions momentanées. Dans le cas où la seconde décision consiste à procéder au second forage, le lot correspondant de la première loterie est une nouvelle loterie. Prenons-en un autre exemple : si l et l' sont deux loteries et si on tire à pile ou face laquelle des deux on joue, on obtient une nouvelle loterie. On peut noter 1/2 l + 1/2 l' cette nouvelle loterie. Par exemple :

Soit l et l' les loteries définies par :

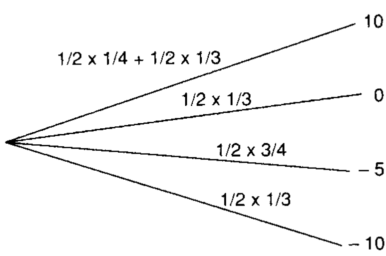




La loterie composée 1/2 l + 1/2 l' est définie par :



Il sera admis (il s'agit en fait d'un axiome) que cette loterie est identique à :



L'axiome d'indépendance semble tout aussi « naturel » que le précédent sur de nombreux exemples, comme le suivant : supposons que vous préfériez le lot a (ce peut être un billet de loterie, mais aussi une voiture ou bien un voyage en Thaïlande) au lot b (une bicyclette), si vous préférez la loterie l de l'exemple précédent à la loterie l', vous devez aussi préférer la loterie l_1 obtenue à partir de l en remplaçant le lot 10 par le lot a, à la loterie l'_1 obtenue à partir de l' en remplaçant le lot 10 par le lot b. Cela semble assez naturel ; pourtant, le paradoxe d'Allais, que nous exposerons au chapitre VIII, montre que cette exigence a des implications qui ne sont pas toujours vérifiées par les décideurs.

L'axiome d'indépendance qui donne à la représentation une propriété de linéarité est le suivant : *A_2 : Étant donné deux loteries l et l' telles que l est préférée à l', et un nombre t compris entre 0 et 1, pour toute troisième loterie l'', la loterie composée tl + (1 – t)l'' doit être préférée à tl' + (1 – t)l''.*

Avec ce dernier axiome, on démontre qu'il est possible d'écrire V comme l'espérance mathématique de l'utilité U (voir par exemple Kast [1991], chapitre 4). Considérons une loterie, soit l, qui donne à la conséquence c la probabilité p, à la conséquence c', la probabilité p' et à la conséquence c'' la probabilité p'', avec p + p' + p'' = 1, de sorte que toutes les autres conséquences ont pour probabilité 0. Alors, si les préférences représentées par la fonction V vérifient les trois axiomes, on peut écrire : V(l) = pU(c) + p'U(c') + p''U(c'').

Ainsi, dans l'exemple précédent, si on suppose que U(10) = 10, U(0) = 5, U(– 5) = 2 et U(– 10) = 0, on peut calculer :

V(l) = 1/4 x 10 + 3/4 x 2 = 4

V(l') = 1/3 x 10 + 1/3 x 5 + 1/3 x 0 = 5

d'où on déduit :

V(1/2 l + 1/2 l') = 1/2 V(l) + 1/2 V(l') = 1/2 x 5 + 1/2 x 4 = 9/2

La fonction U, de même que la fonction V, n'est pas unique. En effet, les deux premiers axiomes impliquent que de telles fonctions existent, mais il est clair que toutes fonctions croissantes de ces fonctions représentent aussi bien les préférences. Le troisième axiome limite ces possibilités puisqu'on démontre que seules les fonctions affines de U, c'est-à-dire les fonctions de la forme aU + b, où a est un nombre positif et b un nombre quelconque, représentent aussi de telles préférences. (Les nombres a et b sont déterminés par l'attribution arbitraire de valeurs à deux conséquences, les valeurs 10 et 0 aux conséquences 10 et – 10 dans notre exemple.)

De ce fait, au lieu de la simple utilité « ordinale » que donnent les deux premiers axiomes, le troisième permet de définir ce qu'il est convenu d'appeler une utilité cardinale, c'est-à-dire une utilité qui permet de mesurer les différences entre les préférences.

C'est cette propriété de cardinalité qui donne à la théorie de l'utilité espérée sa potentialité dans l'étude des problèmes de décision en situation de risque, puisqu'elle permet de mesurer l'aversion pour le risque que révèle le décideur, dont on a pu déterminer la fonction d'utilité.

4. Extension de la théorie au cas d'incertitude non probabilisée

La généralisation la plus importante de cette théorie est due à Savage [1954]. Elle s'applique aux situations où la distribution sur les aléas n'est pas connue de façon objective comme c'est le cas, par exemple, pour des paris sur des courses de chevaux par opposition à des paris sur des loteries dont la distribution est connue. L'idée de cette théorie consiste à représenter le comportement d'un décideur par un critère qui s'écrive, aussi, comme une espérance mathématique d'une fonction d'utilité sur les conséquences, mais la distribution par rapport à laquelle l'espérance est calculée n'a pas le caractère objectif d'une distribution sur une loterie, elle est révélée par le comportement du décideur. Elle peut être interprétée comme une mesure subjective attribuée par le décideur à la vraisemblance des événements aléatoires (cette interprétation, qui justifie le concept de probabilité subjective, ne doit pas laisser oublier que l'apparition de cette probabilité dans le critère est due aux propriétés — mathématiques — des préférences, lorsqu'elles vérifient les axiomes de la théorie).

Lorsqu'il n'y a pas de distribution connue sur les conséquences, il est donc possible, dans le but d'étendre la théorie de l'utilité espérée, de supposer que l'agent va tout de même en utiliser une. Cette distribution peut avoir le caractère d'un *a priori* subjectif ou provenir des propriétés de la représentation des préférences. C'est cette seconde interprétation qui nous guide ici.

Dans le cas de situation de risque, chaque décision correspondait à une distribution de probabilité sur les conséquences (à la roulette, choisir de miser sur le 12 correspond à choisir la distribution de probabilité sur les conséquences : 1/37 sur 360 ; 0 sur 20 ; 36/37 sur – 10). Dans la situation d'incertitude que nous considérons ici, chaque décision ne correspond plus qu'à une relation entre les événements et les conséquences (miser 10 euros sur le cheval numéro 12, placé à 36 contre 1, a pour conséquences : 360 si le 12 gagne, – 10 sinon et il ne pourra pas avoir 20 comme conséquence). Cette relation est définie par la fonction conséquence c : $A \mathrm{x} \Omega \rightarrow C$, et, à une action $a \in A$ correspond la fonction $c(a, .) : \Omega \rightarrow C$. Une telle relation (fonction de Ω dans C) est appelée un « acte » par Savage. Définir un critère sur les décisions est équivalent à en définir un sur les actes et, par conséquent, le décideur doit avoir des préférences sur ces actes.

Examinons sur un exemple la signification des « actes ». Un investisseur doit faire une série de placements pour lesquels il réussit à faire passer les ordres ou non, selon son attention aux opportunités du marché (… et la disponibilité téléphonique de son agent de change). Sa décision porte sur l'effort qu'il fournit, quant aux états aléatoires, ils sont liés à une multitude de facteurs impondérables que nous résumons par :

— « il réussit à faire passer les ordres » : que nous appellerons « oui » ;

— « il ne réussit pas » : que nous appellerons « non ».

Nous allons considérer les deux actes suivants :

— acte 1 : obtenir un portefeuille final intéressant si « oui » et, si « non », faire un investissement risqué qui rapporte :

M€ 100,00 ou M€ 0,00 avec une probabilité (connue) de $\frac{1}{2}$;

— acte 2 : recevoir M€ 100,00 si « oui » et recevoir M€ 0,00 si « non » (ce qui revient, pour le décideur, à parier M€ 100,00 qu'il réussira à faire passer ses ordres).

Si le premier acte est préféré au second, par exemple, et qu'on peut définir une valeur pour chacun de ces actes qui se décompose comme des espérances d'utilité, on pourra tirer certaines conclusions. Par exemple, si l'utilité du gain est identique au gain lui-même et si l'espérance de la valeur du portefeuille final est R, on aura (puisque $\frac{1}{2} \times 100 + \frac{1}{2} \times 0 = 50$) :

— valeur de l'acte 1 : proba (oui) × R + proba (non) × 50 ;
— valeur de l'acte 2 : proba (oui) × 100 + proba (non) × 0.

Dans ces expressions, la probabilité de réussir ou non est révélée par la préférence de l'agent et la valeur de l'acte, et non l'inverse. Ainsi, si l'acte 1 est préféré à l'acte 2, on peut en déduire que :

$$\text{proba (oui)} \times R + \text{proba (non)} \times 50 > \text{proba (oui)} \times 100 + \text{proba (non)} \times 0,$$

soit :

$$\text{proba (non)} > \text{proba (oui)} \times \frac{100 - R}{50}.$$

C'est-à-dire que le décideur pense qu'il est peu probable qu'il réussisse.

Les axiomes de Savage permettent à la fois de définir une fonction d'utilité sur les conséquences et une distribution de probabilité (subjective) sur les aléas. Pour cela, un ensemble des événements pertinents qui permette de définir une distribution de probabilité doit être pris en considération ; nous l'appellerons ε. Cet ensemble doit être une tribu (c'est-à-dire que Ω et $\emptyset$ doivent être dans ε ainsi que toute réunion dénombrable d'événements et que le complémentaire de tout événement).

Nous appellerons $\mathcal{A}$ l'ensemble des actes, cet ensemble sur lequel la relation de préférence $\succcurlyeq$ est définie doit aussi être assez complet, c'est-à-dire qu'il doit contenir :

— les actes dits « en escalier », c'est-à-dire ceux qui sont constants sur des événements qui forment une partition de Ω, comme l'acte f suivant :

$\cup E_i = \Omega$ et $\forall i \ \forall j \ E_i \cap E_j = \emptyset$ et $\forall i \ \forall \omega \in E_i \ f(\omega) = c_i$.

(Les actes constants sont des cas particuliers des actes en escalier puisqu'ils associent une même conséquence à tous les aléas ; nous les assimilerons à cette conséquence et la relation de préférence sur les conséquences est une restriction de celle sur les actes.)

— Les « greffes » formées de la combinaison de deux actes à partir d'un événement : si a et b sont deux actes et E est un événement, l'acte g défini par $g(\omega) = a(\omega)$ si $\omega \in E$ et $g(\omega) = b(\omega)$ si $\omega \notin E$, doit aussi appartenir à $\mathcal{A}$.

Le premier axiome de Savage précise ces conditions et la propriété de la relation de préférence que nous avions déjà rencontrée dans le précédent axiome A_0 : elle doit permettre de comparer tous les actes.

Le second axiome est appelé axiome d'indépendance comme notre précédent axiome A_2 qui en est un cas particulier dans les situations de risques. Cet axiome ou axiome de la « chose sûre » exprime que les préférences entre deux actes ne dépendent pas des événements sur lesquels ils sont identiques. Il permet de définir une nouvelle relation de préférence, appelée préférence conditionnelle, définie relativement à chaque événement.

Soit E un événement et a et b deux actes, nous dirons que a est préféré à b conditionnellement à E, ce que nous noterons a $\succcurlyeq_E$b, si et seulement si pour tout couple d'acte a' et b' tels que :
— a' coïncide avec a sur E,
— b' coïncide avec b sur E,
— et a' coïncide avec b' sur le complémentaire de E,
— alors a $\succcurlyeq$ b.

Il est facile de voir que les préférences conditionnelles constituent aussi des préordres totaux ; ces préordres doivent être cohérents avec la relation de préférence sur les conséquences, c'est ce que précise le troisième axiome.

Deux autres axiomes précisent la relation entre les préférences sur les actes et sur les conséquences.

Enfin, la théorie de Savage nécessite deux axiomes techniques assurant aux probabilités subjectives, qui seront définies par la représentation des préférences, d'être bien des distributions de probabilité.

De ces sept axiomes, il est possible de déduire le théorème de Savage qui, en substance, prouve que des décideurs respectant ces axiomes se comportent comme s'ils maximisaient une utilité espérée calculée par rapport à une distribution de probabilité subjective (personnelle). Le théorème peut s'exprimer ainsi :

Théorème : *Si les préférences sur les actes définis sur un espace probabilisable (Ω, ε) vérifient les sept axiomes de Savage, il existe une distribution de probabilité unique P sur (Ω, ε) et une fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern U sur les conséquences telles que les préférences sur les actes soient représentées par une fonction W définie comme l'espérance mathématique de l'utilité par rapport à la distibution subjective P.*

Nous verrons au chapitre VII une version du même théorème fondée sur une axiomatique différente, mieux adaptée, à notre sens, au problème de la décision statistique qui est un problème de décision dans une situation d'incertitude particulière : incertitude sur un paramètre définissant la distribution de probabilité qui régit un phénomène aléatoire.

5. Applications de la théorie de l'utilité espérée

Du fait de ses fondements théoriques, le critère de l'utilité espérée est celui auquel les théoriciens du risque ont pu se référer. Lorsqu'il est établi que le comportement d'un décideur vérifie les axiomes de la théorie, sa fonction d'utilité peut être déterminée. La vérification des axiomes, comme la construction, point par point, de la fonction d'utilité se font à l'aide de questionnaires et sur l'observation de décisions prises auparavant le cas échéant. Les questionnaires consistent à interroger le décideur sur des situations simples :

— quel prix êtes-vous prêt à payer pour un contrat d'assurance sur le risque de perte d'une somme de 10 000 euros avec une probabilité de 1/2 ? avec une probabilité de 1/4 ? avec une probabilité de 1/10 ?, etc. ;

— pour quelle probabilité, p, êtes-vous indifférent entre 10 euros et un billet de loterie qui vous permet de gagner 100 euros avec probabilité p ou perdre 100 euros avec probabilité 1 – p ?

De nombreuses procédures de ce type sont utilisées par les spécialistes de l'aide à la décision (voir par exemple Raiffa [1970]).

Ce critère a ainsi permis de résoudre de nombreux problèmes de décision. Il a aussi permis d'élaborer des théories économiques faisant intervenir l'incertitude : les problèmes d'assurance et de couverture du risque, la théorie des marchés dans l'incertain (les marchés financiers, en particulier), les problèmes de choix d'investissements, et, plus récemment, de nombreux problèmes d'organisation industrielle et de choix social.

La théorie axiomatique de l'utilité espérée fut élaborée pour construire la théorie des jeux, elle est donc présente dans tous les travaux sur la résolution des situations de conflits. Elle est présente aussi dans l'élaboration de certains critères de la décision statistique que nous verrons au chapitre VII, après avoir présenté ses applications directes à la mesure de l'aversion pour le risque au chapitre VI.

Toutefois, insistons sur le fait que, fondée sur des axiomes, elle ne peut prétendre s'appliquer à tout décideur. Si le comportement d'un décideur viole certains axiomes, le critère de l'utilité espérée ne représentera pas ses préférences, nous verrons d'autres théories qui peuvent alors être invoquées, au chapitre VIII.

VI / Le risque

Nous avons défini les situations de risque comme celles dans lesquelles les conséquences des décisions prises dépendent d'aléas dont la distribution de probabilité est connue. Cette définition, qui est celle communément utilisée en théorie de la décision et en économie de l'incertain, ne recouvre certainement pas toutes les situations que le langage courant désignerait comme risquées. Il y a un risque à sauter en parachute, à s'approcher d'un volcan, à rouler à gauche sur une route française (et même à droite, surtout le samedi soir !), mais dans chacun de ces cas la probabilité d'accident n'est pas connue. Toutefois, si une compagnie d'assurances décidait d'offrir un contrat pour ces types de risques, elle se livrerait généralement à une étude statistique. De cette étude, des paramètres de la distribution des probabilités d'accidents seraient déduits, ce qui permettrait de se ramener à une situation de risque telle que nous l'avons définie. Dans les cas où une telle étude statistique n'est pas pertinente (courses de chevaux, accident de centrale atomique), une étude d'experts pourra éventuellement attribuer des probabilités subjectives aux événements qui concernent les décisions. L'étude des risques et leurs mesures pourront donc se faire sur la base de distribution de probabilités qui régissent les conséquences. L'analyse de l'aversion pour le risque que peuvent exprimer les décideurs doit recourir à une représentation de leurs comportements, la théorie de l'utilité espérée en a proposé une dans le cadre des situations de risque ; nous présentons certaines de ses applications.

1. Aversion pour le risque, équivalent certain

Dans les problèmes de décision à caractère économique, les conséquences sont généralement exprimées en valeur monétaire (en richesse). De ce fait, puisqu'il s'agit de nombres, on peut parler de valeur moyenne (alors que, pour un problème de décision où les conséquences ne sont pas numériques, la notion de moyenne n'a pas de sens). Pour un agent qui adhère aux axiomes de la théorie de l'utilité espérée, tout se passe comme s'il assignait une valeur d'utilité à chaque niveau de richesse possible. Pour un tel agent, il sera possible d'évaluer son attitude vis-à-vis du risque en comparant les niveaux de richesse possibles et les valeurs d'utilité qu'il attribue à ces niveaux.

Un investissement risqué consiste à dépenser un certain capital (richesse) pour obtenir un rendement aléatoire. Dans une situation de risque on suppose connue la distribution de probabilité des rendements possibles, autrement dit, faire un investissement risqué revient à acheter un billet de loterie (au sens général où nous l'avons défini).

On appelle équivalent certain d'une loterie (d'une décision en situation de risque) une conséquence (ici un niveau de richesse) dont l'utilité est égale à l'utilité espérée de la loterie. Ce sera, par exemple, le prix maximal qu'un joueur sera prêt à payer pour un billet de loterie : le joueur est indifférent entre le billet de loterie et la somme de monnaie correspondant à son prix. Autrement dit, obtenir l'équivalent certain (qu'un agent donné attribue à une loterie) est donc indifférent, pour cet agent, aux lots incertains de la loterie. La valeur investie dans un actif risqué est l'équivalent certain des rendements possibles de cet investissement (si l'investisseur évalue ces rendements possibles par leur utilité espérée).

Ainsi, si l'utilité d'un investisseur est la fonction logarithme, l'utilité espérée d'un titre financier qui peut rapporter 100 euros avec une probabilité 1/4, ou 10 euros avec une probabilité 3/4, sera :

$u = 1/4 \ln 100 + 3/4 \ln 10 = 5/4 \ln 10 \cong 5/4 \times 2{,}3 = 2{,}9$

L'équivalent certain de ce titre est donc un nombre, soit EC, tel que :

$\ln EC = 2{,}9$, soit $EC = \exp 2{,}9 \cong 18{,}5$.

Pour cet investisseur, détenir ce titre financier au rapport incertain est équivalent à la détention de 18,5 euros ferme.

D'une manière générale, si nous notons EC(l) l'équivalent certain d'une loterie l, et V(l) son utilité espérée, nous avons : U [EC(l)] = V(l).

La notion d'équivalent certain permet de comparer des loteries et, d'une manière plus générale, des situations de risque. Elle permet aussi de déterminer l'attitude face au risque d'un agent dont la fonction d'utilité est connue. Réciproquement, en observant l'attitude face au risque d'un agent et ses équivalents certains, il devient possible de caractériser sa fonction d'utilité.

Prenons l'exemple d'une compagnie d'assurances, une mutuelle en situation de monopole régional, pour éliminer les problèmes de concurrence et de profits qui ne nous concernent pas ici. Supposons que cette compagnie est à même de financer les remboursements de sinistres d'incendie annuels sur les primes versées par les assurés. Elle peut alors calculer cette prime en fonction de la valeur assurée et de la probabilité d'incendie de manière équitable : si votre maison vaut 1 000 000 d'euros, et la probabilité qu'elle soit détruite par le feu est 0,001, la prime proposée pour une assurance totale sera de 1 000 euros. En effet, si la compagnie a suffisamment d'assurés, elle ne fera pas face à des risques de pertes (le montant des primes compensant les remboursements de sinistres) et se conduira donc comme s'il n'y avait pas de risque : elle est indifférente au risque d'incendie. Elle calcule alors la prime en faisant la moyenne des gains et des pertes : $1\,000\,000 \times 0{,}001 + 0 \times 0{,}999 = 1\,000$.

Nous dirons qu'un agent est *indifférent au risque* lorsqu'il est indifférent entre une loterie et le gain moyen que lui procure cette loterie, autrement dit s'il est prêt à payer le gain moyen pour un billet de cette loterie. L'équivalent certain d'une loterie pour un tel agent est donc son gain moyen. Prenons une loterie de la forme :

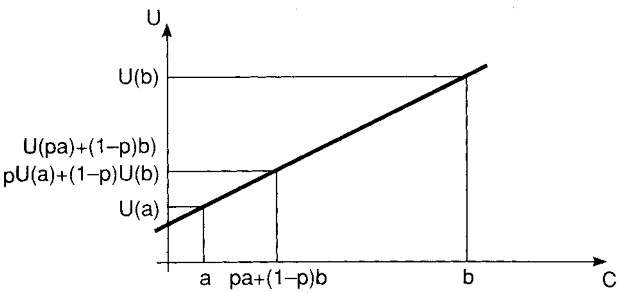
— revenu a avec une probabilité p ;
— revenu b avec une probabilité 1 – p.

Nous avons donc : $EC = p\,a + (1 - p)\,b$, soit :
$p\,U(a) + (1 - p)\,U(b) = U(EC) = U(p\,a + (1 - p)\,b)$.

L'utilité espérée de la loterie est l'utilité du revenu moyen ; de ce fait, son équivalent certain est égal à son revenu moyen la [fonction d'utilité U est inversible, on a donc $EC = p\,a + (1 - p)\,b$]. La formule précédente caractérise une fonction U dont le graphe est une droite [la fonction U est nécessairement de la forme : U(x) = αx + β].

L'indifférence au risque est donc caractérisée par une fonction d'utilité linéaire (affine, en fait) : son graphe est une droite (figure 1 ci-dessous). Pour une telle fonction, l'utilité marginale est constante : le gain d'utilité obtenu en ajoutant 1 euro à une richesse de 1 000 euros est identique à celui obtenu en ajoutant 1 euro à un niveau de richesse de 10 euros.

FIG. 1. — INDIFFÉRENCE AU RISQUE

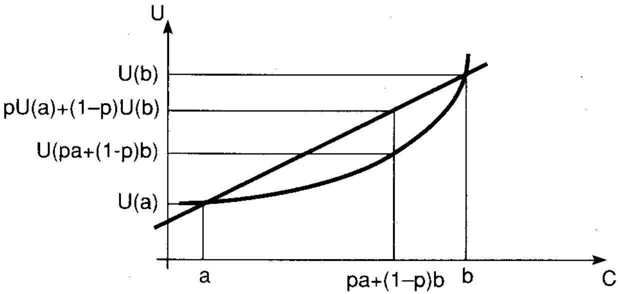


Lorsqu'un agent préfère une loterie à la possession sans risque de son gain moyen, on dit qu'il montre de la *propension au risque*, ou encore qu'il est « risquophile ». Ce serait le cas de certains propriétaires trouvant que les primes d'assurance sont trop élevées et qui préfèrent encourir le risque de perdre la valeur de leur maison plutôt que de prendre un contrat d'assurance. Le cas est rare lorsque des sommes importantes sont concernées, et, lorqu'il se produit, il provient plus d'une mauvaise appréciation des probabilités que de véritable propension pour le risque. En revanche, pour de faibles risques de pertes (10 euros) et de larges possibilités de gains (1 000 000 d'euros), il est très courant (grâce à quoi la Société nationale des jeux rapporte beaucoup d'argent à l'État français) de voir des individus acheter des billets de loterie alors que le gain espéré est (quasi) nul. Pour un tel agent, l'équivalent certain de la loterie est supérieur à son gain moyen : p a + (1 – p) b ≤ EC, soit,

U(p a + (1 – p) b) ≤ U(EC) = p U(a) + (1 – p) U(b)

Une telle relation, qui définit *la propension au risque, caractérise une fonction d'utilité convexe* (figure 2). Pour une telle fonction, l'utilité marginale est croissante : le gain d'utilité obtenu en ajoutant 1 euro à une richesse de 1 000 euros est supérieur à celui obtenu en ajoutant 1 euro à un niveau de richesse de 10 euros.

FIG. 2. — PROPENSION AU RISQUE



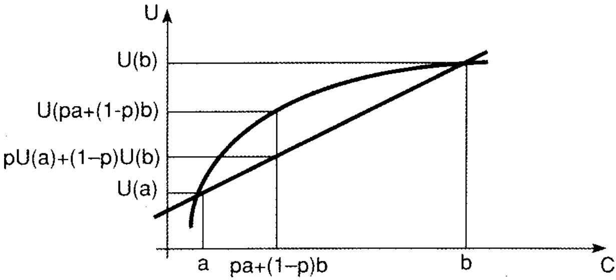
L'attitude la plus commune dans les problèmes de décision à caractère économique est celle d'*aversion pour le risque*. Ainsi, la demande d'assurance se maintient bien que les primes d'assurances ne soient (malheureusement) pas calculées d'une manière aussi équitable que celle que nous avons décrite. Cela n'empêchera pas la plupart des propriétaires d'accepter un contrat dont la prime est de 2 000 euros alors que leur perte espérée (là, le terme mathématique est malheureux !) n'est que de 1 000 euros. La différence est justifiée par l'aversion pour le risque du propriétaire, ce qui permet à la compagnie d'assurances de faire face aux coûts dont nous n'avons pas tenu compte et de faire des profits. D'une manière générale, pour un agent qui a de l'aversion pour le risque, l'équivalent certain de la loterie est inférieur à son gain moyen, l'agent préférant une valeur inférieure mais certaine à une situation où il risque de perdre. On a :

$p\,a + (1 - p)\,b \geq EC$, soit,

$U(p\,a + (1 - p)\,b) \geq U(EC) = p\,U(a) + (1 - p)\,U(b)$.

Cette relation, qui définit l'*aversion pour le risque, caractérise une fonction d'utilité concave* (figure 3), la fonction logarithme en est un exemple. Pour une telle fonction, l'utilité marginale est décroissante : le gain d'utilité obtenu en ajoutant 1 euro à une richesse de 1 000 euros est inférieur à celui obtenu en ajoutant 1 euro à un niveau de richesse de 10 euros.

FIG. 3. — AVERSION POUR LE RISQUE



On peut alors définir la *prime de risque* associée à une loterie l, comme la richesse PR(l) qu'un agent qui a de l'aversion pour le risque est prêt à payer pour ne pas avoir à encourir le risque. Cette somme est définie par l'équation : m – PR(l) = EC(l), où m est le gain moyen de la loterie.

Si, au contraire, l'agent a de la propension pour le risque, PR(l) correspond à la somme qu'il est prêt à accepter pour ne pas participer à la loterie : PR(l) – m = EC(l).

Enfin, pour un agent qui est indifférent au risque, la prime de risque est nulle puisque m = EC(l).

2. Indices d'aversion pour le risque

Caractérisant la propriété de concavité de la courbe de la fonction d'utilité, Arrow [1965] et Pratt [1964] ont utilisé les dérivées première et seconde de cette fonction (lorsqu'elles existaient) pour en déduire une mesure locale du risque. Un calcul approché de la prime de risque au voisinage de la moyenne x d'une distribution l montre que :

$$PR(l) = -\frac{1}{2}\,\sigma^2\,\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

où σ^2 est la variance de la distribution et U' et U'' les deux premières dérivées de la fonction d'utilité U par rapport à la richesse x. La fonction d'utilité est croissante, donc $U'(x) > 0$, et si l'agent a de l'aversion pour le risque, la fonction d'utilité est concave, donc $U''(x) < 0$.

L'indice absolu d'aversion pour le risque au voisinage d'un niveau x de richesse est alors :

$$r(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}.$$

Le théorème de Pratt permet de dire qu'un agent qui a un indice absolu d'aversion pour le risque au niveau x égal à r(x) a davantage d'aversion pour le risque qu'un agent qui a un indice r'(x), si $r(x) < r'(x)$. Si le premier agent a une fonction d'utilité logarithmique $U(x) = \ln(x)$, son indice d'aversion pour le risque au niveau de richesse 100 est : $-\frac{-1}{10\,000} \times 100 = 0{,}01$. Un autre agent qui aurait une utilité définie par $U(x) = \frac{100x}{100 + x}$ aurait un indice d'aversion pour le risque de $\frac{-1}{800} \times 4 = 0{,}005$. Le second agent présente donc moins d'aversion pour le risque que le premier, il sera prêt à accepter plus de risque dans ses décisions et à payer moins cher des contrats d'assurance pour le même risque.

3. Mesures du risque

La théorie de l'utilité mesure le risque à partir des préférences de l'agent : une loterie l' est plus risquée qu'une autre loterie l'', si l'utilité de l', V(l'), est inférieure à V(l'') pour un agent qui a de l'aversion pour le risque. La plupart des applications à l'économie et à la gestion de la théorie du risque et de la décision dans l'incertain concernent des agents qui ont de l'aversion pour le risque, c'est pourquoi les mesures du risque sont presque toujours définies dans ce contexte.

Sans une théorie de la représentation des préférences comme celle de l'utilité espérée, l'analyse du risque ne peut se faire qu'en comparant directement les distributions de probabilité.

Un critère élaboré en relation avec la notion de valeur de l'information Blackwell [1953] est fondé sur la définition suivante. Une distribution l’ est plus risquée qu’une distribution l’’ de même moyenne, si la première est obtenue par une transformation aléatoire de la seconde. Par exemple, une distribution sur des revenus :

Revenus	800	600	17	– 200
Probabilités	0,16	0,04	0,46	0,34

est moins risquée que celle obtenue en ajoutant une incertitude de ± 10 avec probabilité 1/2 à chacun des revenus :

Revenus	810	790	610	590	27	7	– 190	– 210
Probabilités	0,08	0,08	0,02	0,02	0,23	0,23	0,17	0,17

Plus généralement, si e est une variable aléatoire qui prend des valeurs $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ avec les probabilités $p(\varepsilon_1) \ldots p(\varepsilon_n)$, l’ met les probabilités $p(y_1) \ldots p(y_n)$ sur $y_1 \ldots y_n$ et l’’ les probabilités $p(x_1) \ldots p(x_n)$ sur $x_1 \ldots x_n$, on dira que l’ est plus risquée que l’’ si $\Sigma\varepsilon_i p(\varepsilon_i) = 0$ et si, pour tout i, $y_i = x_i + \varepsilon_i$. En s’inspirant de cette définition, l’aversion pour le risque peut être définie de la manière suivante.

Un décideur a de l’aversion pour le risque s’il préfère toute variable aléatoire X à une variable aléatoire X + Y, où Y est d’espérance nulle. Autrement dit, un décideur a de l’aversion pour le risque s’il considère comme indésirable un ajout de variabilité (Y) qui n’augmente pas l’espérance de ses gains.

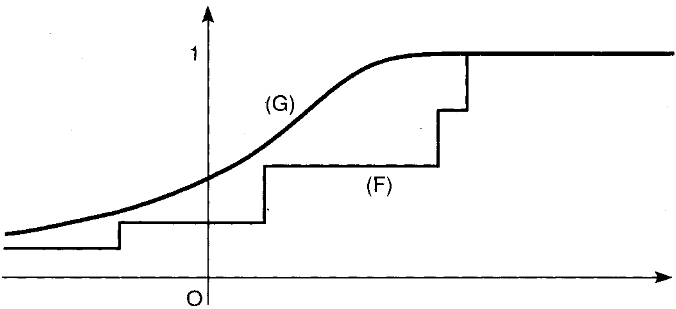
On peut démontrer que cette définition est équivalente à V(l’) < V(l’’) pour un agent ayant de l’aversion pour le risque au sens de l’utilité espérée, lorsque les loteries l’ et l’’ sont les distributions des variables X et X + Y.

Les représentations graphiques des distributions, qu’elles soient faites par des diagrammes représentant les fréquences ou les fréquences cumulées, permettent de comparer directement les domaines les plus probables. La comparaison des risques associée à ces représentations s’appelle la *dominance stochastique*.

Une distribution P sur **R** peut être définie par sa fonction de répartition F, c’est-à-dire la fonction des probabilités cumulées. La fonction de répartition d’une distribution de probabilité P est définie par la fonction : $H(x) = P(]-\infty, x])$, son graphe est en escalier, comme la fonction F, ou est une courbe plus régulière, comme la fonction G. Une distribution P', dont la fonction de répartition est F, domine stochastiquement une distribution P'' dont la fonction de répartition est G [définie par : $G(x) = Q(]- \infty, x])$] si pour tout nombre réel x, $F(x) \leq G(x)$.

Une notion de dominance plus faible est la dominance stochastique d'ordre 2 ; au lieu de comparer les courbes des fonctions de répartition, on compare les surfaces qu'elles délimitent avec l'axe horizontal.

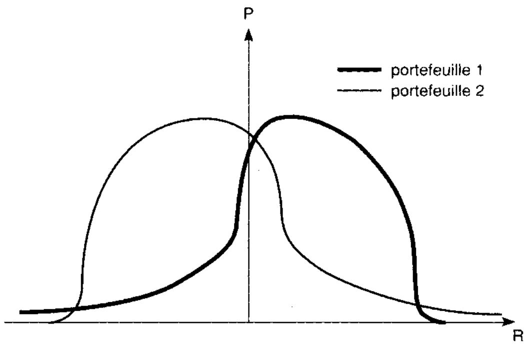
LA FONCTION DE RÉPARTITION F
DOMINE STOCHASTIQUEMENT LA FONCTION G



La définition d'une distribution par ses moments (espérance, variance, moment d'ordre trois ou supérieur) qui ne s'applique, bien entendu, que dans la mesure où ces moments ne sont pas infinis, permet de caractériser le domaine et la variabilité d'une variable aléatoire. Aussi, la mesure du risque la plus couramment employée est-elle le paramètre de la distribution qui caractérise sa variabilité autour de sa valeur moyenne : la variance. C'est cette mesure qui est utilisée dans les critères de décision à deux paramètres : la moyenne ou l'espérance du revenu que l'agent cherche à maximiser et la variance qu'il cherche à minimiser. La théorie du portefeuille de Markowitz [1959] a rendu célèbre ce double critère, appelé critère espérance-variance. On peut montrer que, dans certains cas particuliers, le critère de Markowitz est équivalent à la maximisation d'une utilité espérée (si cette fonction d'utilité est quadratique ou si la distribution est définie par ses deux premiers moments uniquement, comme la loi normale).

En effet, si la fonction d'utilité est quadratique : $U(x) = \alpha x - \beta x^2$, l'utilité espérée, $E[U(x)] = \alpha E[x] - \beta E[x^2] = \alpha E[x] + \beta E^2[x] - \beta Var[x]$ sera, maximale si $E[x]$ est maximale et $Var[x]$ est minimale.

Toutefois, la variance est une mesure du risque insatisfaisante, comme le montre l'exemple suivant représentant les distributions de deux portefeuilles :



Les deux densités représentées ont la même espérance et la même variance parce que symétriques par rapport à l'axe de la moyenne, pourtant celle de droite met, dans un certain sens, plus de poids sur la partie positive des revenus que celle de gauche ; de nombreux agents la trouveront donc moins risquée.

Conclusion

La mesure du risque peut se faire d'une manière absolue en comparant directement des distributions de probabilité ou une mesure de leur dispersion comme la variance. Les différentes définitions de la dominance stochastique permettent d'établir des comparaisons du risque d'une distribution par rapport à une autre. Elles ne sont cependant pas suffisantes pour tenir compte du comportement individuel face au risque. De même, une mesure de la dispersion, comme la variance, si elle caractérise généralement le risque, peut cacher certaines dissymétries auxquelles un décideur peut être sensible. C'est pourquoi, pour des analyses plus fines et mieux adaptées à un problème de décision individuel, il est nécessaire de mettre en jeu une représentation du comportement du décideur. Le critère de l'utilité espérée est une représentation des préférences de décideurs en situation de risque. Dans la mesure où un décideur adhère aux axiomes de la théorie de l'utilité espérée, la forme de sa fonction d'utilité permet de caractériser son aversion, et, localement, son degré d'aversion pour le risque. Grâce à ces caractérisations, il sera possible de répondre à des questions du type :

— Dois-je accepter de souscrire à un contrat d'assurance pour la prime proposée ?

— Quelles proportions des actifs disponibles sur le marché financier dois-je inclure dans mon portefeuille ?

— Est-il valable d'entreprendre une étude plus approfondie de la situation afin de préciser la distribution de probabilités sur les conséquences de ma décision ? (Quelle est la valeur de l'information que je pourrai recueillir ?)

— Quelle stratégie adopter face à un adversaire dont je peux mesurer l'aversion (ou la propension) au risque au vu de ses décisions passées ?

— Etc.

Pour des agents dont le comportement viole certains des axiomes, nous devons chercher l'appui de théories alternatives à celle de l'utilité espérée ; nous en proposons au chapitre VIII. Dans tous les cas, nous aurons besoin d'estimer les paramètres qui précisent les distributions de probabilités ; c'est l'objet de la décision statistique que nous abordons au chapitre suivant.

VII / Décisions statistiques

L'analyse du risque suppose que la distribution de probabilités sur les conséquences des décisions soit connue. Dans la plupart des situations d'incertitude, cette distribution, à supposer que son existence ait un sens, est mal connue du décideur. Afin de spécifier et d'identifier cette distribution, le décideur pourra avoir recours à l'étude des statistiques. Le recueil de statistiques (ce qui, à l'origine, signifie constats ou situations), c'est-à-dire de listes de données quantitatives, s'est systématisé au XIXe siècle dans la plupart des administrations. Très vite se sont développées des méthodes de calcul (alors appelées arithmétique politique) permettant de faire des estimations de résultats qu'il eût été trop long ou trop difficile de faire exhaustivement. En s'affinant et en s'appliquant aussi à des résultats aléatoires, les méthodes statistiques se sont de plus en plus appuyées sur la théorie des probabilités. Depuis les années trente, la statistique est une théorie mathématique découlant de la théorie des probabilités : la statistique mathématique. Mais la statistique soulève aussi des problèmes de décisions puisque le statisticien doit finalement, d'une manière plus ou moins précise, décider de la « vraie » distribution de probabilités. Aussi, la théorie de la décision peut-elle être invoquée pour justifier certaines méthodes statistiques. L'ouvrage de Savage, où sa théorie est présentée (voir la fin de notre chapitre V), avait pour objet d'étudier les fondements de la statistique ; il reste la bible des statisticiens « bayésiens [1] ». Ceux-ci se distinguent des

1. Parce qu'ils utilisent le théorème attribué à Bayes (1720-1761) et certaines de ses idées concernant l'information, développées dans son ouvrage posthume :

statisticiens « classiques » par le fait qu'ils accordent de l'importance à des informations qui ne sont pas de nature statistique et qu'ils font, de ce fait, intervenir des probabilités subjectives.

Bien que les méthodes statistiques puissent être utilisées à des fins purement informationnelles dans un premier temps, les sondages, l'analyse de données, les estimations de pourcentages et d'autres paramètres de distribution de probabilités sont employés par des décideurs : planificateurs gouvernementaux, responsables du marketing, thérapeutes, etc. Tout problème de décision qui ne se pose pas, au départ, dans une situation de risque en contient en fait deux : un problème de décision statistique dont la solution sera la caractérisation de la distribution de probabilités qui sera utilisée pour résoudre le problème de décision proprement dit.

Nous analyserons, dans un premier temps, le problème de la décision dans une situation d'incertitude particulière que nous qualifierons de « statistique ». Dans un second temps, nous reviendrons sur les problèmes de décisions statistiques, comme ils sont présentés dans les ouvrages de statistique mathématique, c'est-à-dire considérés isolément d'un problème plus général de décision.

1. Le problème de décision en situation d'incertitude statistique

Nous nous proposons de lancer un nouveau produit sur le marché. Le profit que nous espérons réaliser dépend de la réponse du marché, c'est-à-dire de la demande pour ce produit. La demande est incertaine, c'est une fonction décroissante du prix P que nous proposerons ; nous pouvons considérer qu'elle est de la forme $D = D_0 - dP$ où d est un facteur à déterminer. Si nous connaissions d, nous saurions déterminer notre prix optimal P(d) en maximisant notre profit. Mais le facteur d est inconnu et nous sommes en situation d'incertitude. Nous avons déjà un échantillon de fonctions de demande pour une cinquantaine de produits similaires, ce qui nous autorise à penser que d est un nombre compris entre 0 et 5 et qu'il est distribué selon

« An Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances », *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 53, 1763, p. 370-418.

une loi (approximativement) normale de variance 1 et de moyenne inconnue θ. Si θ était connu, nous serions en situation de risque et nous déciderions du prix en maximisant l'utilité espérée de notre profit. Cela nous donnerait, pour chaque valeur de θ, un prix $P^*(\theta)$. Les prix, $P(d)$ et $P^*(\theta)$, sont optimaux selon nos préférences dans le certain ou dans le risque, ils sont nos meilleures réponses à ce que notre service statistique pourrait nous dire :
— faites comme si $d = 3{,}4$. Nous proposerions alors le produit au prix $P(3{,}4)$, avec le risque que la vraie valeur de d soit 3,5, par exemple ;
— faites comme si la distribution de d était une loi normale de moyenne 4,1. Nous proposerions alors le produit au prix $P^*(4{,}1)$, avec le risque que la vraie valeur du paramètre soit 4, par exemple.

Nous traiterons de la manière dont notre service statistique décide de nous proposer une valeur pour θ au paragraphe suivant ; nous nous concentrons ici sur le problème de décision en situation d'incertitude sur θ, incertitude que nous qualifions de « statistique ». En effet, l'incertitude sur la distribution de la variable aléatoire, c'est-à-dire l'incertitude sur la fiabilité de notre service statistique, ne nous autorise pas nécessairement à utiliser le critère défini en situation de risque (utilité espérée du profit) qui, lui-même, est différent de celui que nous utiliserions sans incertitude (le profit). Les deux risques (risque de nous tromper en utilisant la réponse du service statistique) ne sont pas de même nature : ils correspondent à deux niveaux d'incertitude différents. L'incertitude statistique peut être comprise comme un niveau d'incertitude supérieur à celui des situations de risque. La hiérarchie des niveaux d'incertitude que nous suggérons aurait pour niveau zéro la situation extrême où il n'y a pas d'incertitude (d est connu ou considéré comme tel). Le niveau d'incertitude supérieur serait celui que nous avons décrit précédemment comme une situation de risque : lorsque les conséquences dépendent de variables aléatoires dont les distributions sont connues, les décideurs devront être en mesure de comparer des distributions sur les conséquences. En effet, dans ces situations, à chaque décision correspond une distribution induite sur les conséquences (les profits dans notre exemple). C'est pour ces situations de risque que la théorie de l'utilité espérée a été développée. Cette théorie intègre les préférences et l'incertitude en un critère unique : l'espérance (par rapport à la distribution de probabilité connue) de l'utilité (sur les conséquences).

Le niveau d'incertitude statistique est celui où la distribution sur les aléas n'est pas (ou mal) connue. Toutefois, le décideur considère qu'il y en a une et qu'elle pourrait être définie par un paramètre (ce paramètre peut être un vecteur ou une fonction ; dans notre exemple, c'est la moyenne, θ, d'une distribution normale). Dans ce cas, l'incertitude du décideur porte à la fois sur les aléas, régis par une loi normale, et sur le paramètre qu'est la moyenne de cette loi. C'est en ce sens que ces situations peuvent être considérées comme présentant plus d'incertitude que celles où la distribution est connue. Dans de telles situations, la distribution sur les aléas n'est pas connue, mais elle est supposée exister. Pour formaliser le fait que la distribution n'est pas connue, il est d'usage de dire qu'elle appartient à un ensemble de distributions possibles, ensemble indexé par des paramètres parmi lesquels le problème de décision statistique consiste à déterminer le « vrai ». Si on note θ le paramètre et Θ l'ensemble des paramètres possibles, on notera $\mathcal{P} = (P^{\theta})_{\theta \in \Theta}$ la famille des probabilités qui peuvent régir les aléas. Lorsque $\mathcal{P}$ est la famille des lois normales, comme celles-ci sont complètement caractérisées par les paramètres que sont leur moyenne, m, et leur variance, v, nous aurons $\Theta = \{(m,v) \ / \ m \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{R}+\}$ [2].

Nous pouvons à présent aborder le problème de décision en situation d'incertitude statistique. Si le paramètre était connu, c'est-à-dire si la distribution P sur l'ensemble Ω des aléas était connue, nous serions dans une situation de risque. Dans ce cas, à chaque décision correspondrait une distribution sur l'ensemble C des conséquences induite par la fonction c : $A x \Omega \rightarrow C$, qui à chaque action choisie et à chaque résultat aléatoire associe une conséquence. Au choix de l'action a correspond la distribution que nous pouvons noter P_a sur l'ensemble C des conséquences.

Dans une situation d'incertitude statistique, la distribution P^{θ} n'est pas connue puisque le paramètre θ ne l'est pas. Dans de

2. L'usage veut que les indices q ne soient appelés « paramètres » que dans le cas où Θ est un ensemble de vecteurs de dimension finie ; on parle dans ce cas de statistique paramétrique, de statistique non paramétrique dans les cas plus généraux. Pour simplifier l'exposé, nous appellerons Θ l'ensemble des paramètres dans tous les cas ; c'est lui qui, avec l'ensemble des résultats de l'expérience aléatoire (noté Ω), caractérise l'incertitude statistique.

telles situations, au choix d'une décision correspond une fonction qui, à chaque paramètre, associe une distribution sur les conséquences.

Considérons un problème d'investissement dont les rendements sont aléatoires et peuvent prendre toutes valeurs selon une loi normale dont la moyenne est θ % de la quantité investie et la variance est connue, disons 1. À chaque valeur de θ correspondront une distribution sur les rendements et, donc, une distribution sur les conséquences des investissements. Dans le cas général, au choix d'une action a correspond une fonction qui, à chaque valeur de θ, associe la distribution P_a^{θ}. L'agent devra donc révéler des préférences sur de telles fonctions afin de pouvoir ranger ses décisions. Ces fonctions, contingentes aux paramètres, correspondent à ce que Savage appelle des « actes ». Mais ici, ce sont les paramètres inconnus qui jouent le rôle des « états du monde », alors que chez Savage ces états du monde comprennent « tout ce qui est pertinent pour prendre une décision », c'est-à-dire à la fois les aléas et les paramètres.

La définition d'un critère pour résoudre un problème de décision statistique repose alors sur la représentation de telles préférences sur les actes. Une théorie qui généralise la théorie de l'utilité espérée peut être élaborée afin de justifier l'emploi d'un tel critère (pour des décideurs dont le comportement en vérifie les axiomes). C'était l'objet de la théorie de Savage (chapitre V), la théorie que nous résumons ici (Anscombe et Aumann [1963]) met mieux en évidence le rôle des paramètres, si fondamental en statistique.

Afin de représenter les préférences sur les actes (c'est-à-dire les fonctions contingentes aux paramètres) par une fonction qui ait de « bonnes » propriétés, c'est-à-dire des propriétés semblables à celles de l'utilité espérée, nous devrons élargir l'ensemble des actes en considérant aussi les loteries sur les actes. Cela revient à demander au décideur de savoir comparer des actes aléatoires consistant, par exemple, au fait de tirer à pile ou face entre deux actes. Il faut alors vérifier une cohérence entre les préférences sur les actes, sur les distributions et sur les conséquences afin de faire « remonter » la propriété d'utilité espérée du niveau des préférences sur les distributions (situations de risque) au niveau des préférences sur les actes (situations d'incertitude statistique). La construction de la représentation des préférences utilise deux fois la théorie de von Neumann et Morgenstern. Elle l'utilise au niveau habituel d'agrégation des utilités par une distribution. Elle l'utilise déjà au niveau des actes. En ajoutant deux axiomes à ceux de la théorie de l'utilité espérée, l'existence d'un critère qui représente les préférences peut être démontrée. Ce critère fait intervenir une distribution de probabilités sur les paramètres. Ces paramètres sont donc traités comme s'ils étaient aléatoires et la distribution que révèle le critère (c'est-à-dire, en fait, le comportement du décideur) est interprétée comme une distribution subjective. Si le paramètre θ était connu, le critère serait l'espérance (par rapport à la distribution P^{θ}) de l'utilité des conséquences (l'index de Bernoulli). Lorsque le paramètre θ est inconnu, une distribution sur les paramètres, disons ν, est révélée par le décideur et le critère est alors l'espérance (par rapport à ν) de l'index de Bernoulli.

Par exemple, pour un problème d'investissement dont les rendements suivent une loi normale de variance 1 et de moyenne θ fois la quantité investie, disons x, l'utilité espérée serait : $V(x/\theta) = \int U(x)\, f(x/\theta x)dx$, où $f(x/\theta x)$ est la densité de la loi normale de moyenne θx. Supposons que le décideur se comporte comme si θ ne pouvait prendre que deux valeurs 10 % et 5 % avec les probabilités 1/4 et 3/4, son critère serait alors : $W(x) = 1/4V(x/10\,\%) + 3/4V(x/5\,\%)$.

L'incertitude sur les paramètres est intégrée par la somme pondérée des index de Bernoulli, qui, eux-mêmes, intègrent l'incertitude sur les rendements pour chaque valeur des paramètres.

Les problèmes de décisions statistiques sont des cas particuliers de problèmes de décision en situation d'incertitude statistique. Pour les statisticiens, la décision à prendre consiste à déterminer le ou les paramètres. La conséquence de la décision est généralement considérée comme un écart entre la « vraie » valeur (inconnue) du paramètre et celle qui est déterminée par l'inférence (la décision) statistique. Cet écart, ou perte, est généralement déterminé par des considérations de commodités de calcul et de propriétés mathématiques. Un comportement rationnel voudrait cependant qu'il corresponde à l'utilité espérée du commanditaire de l'étude statistique.

2. Inférence statistique

Prendre une décision statistique consiste à déduire des précisions sur la distribution d'un mécanisme aléatoire, à partir d'observations de réalisations de ce mécanisme. Une estimation consiste à décider d'une valeur du paramètre ; un test consiste à décider si le paramètre vérifie ou non une certaine propriété. Nous nous limiterons ici au problème de l'estimation.

Un échantillon est formé d'une série d'observations, c'est à partir de ces résultats que l'inférence sera faite. Le statisticien dispose donc d'un certain nombre d'observations à partir desquelles il doit décider de certaines caractéristiques des paramètres inconnus. Le principe de la décision statistique est que plus la taille de l'échantillon est importante, mieux il sera possible d'en déduire la distribution qui régit l'expérience aléatoire. Ce principe peut être compris intuitivement lorsque l'expérience consiste à extraire des individus d'une population finie : si l'échantillon est formé de tous les individus de la population, toutes ses caractéristiques seront connues. Plus généralement, ce principe est fondé sur un théorème de la théorie des probabilités, il s'agit d'une des lois des grands nombres. Cette loi dit, en substance, que la distribution empirique (c'est-à-dire celle qui est définie par le rapport du nombre d'observations vérifiant une propriété sur le nombre total des observations : la taille de l'échantillon) tend vers la distribution qui régit l'expérience, lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

Un exemple bien connu est l'estimation de la probabilité d'obtenir « pile » en jetant une pièce de monnaie. L'observation de dix lancers d'une pièce donnera une suite de piles et de faces. C'est un échantillon sur lequel la proportion empirique des piles sera calculée. Bien que la pièce soit régulière il se peut que, sur dix lancers, pile apparaisse plus souvent que face. Mais sur cent lancers, il y aura sensiblement autant de piles que de faces et la proportion empirique sera proche de 1/2 (cent étant un « grand nombre » !). Dans cet exemple, l'expérience est, à proprement parler, la répétition d'un mécanisme aléatoire et le paramètre à estimer est celui qui définit la distribution qui régit les observations. Dans de nombreux cas, les paramètres sont des caractéristiques d'une population : le nombre de chômeurs dans la population d'une région à une période donnée, par exemple. Le mécanisme aléatoire est alors celui qui consiste à tirer au hasard des individus de la population pour former l'échantillon. Ainsi, si le paramètre à estimer est la proportion de mâles dans une population de mouches nées dans un certain environnement, un échantillon de cent mouches peut être prélevé et la proportion de mâles dans cet échantillon est la proportion empirique. Si la population était de cent mouches, ce serait la « vraie » proportion. Si la population est très grande (considérée comme infinie), cette proportion empirique n'est pas la « vraie » proportion, mais la loi des grands nombres prouve qu'elle s'en approche lorsque la taille de l'échantillon croît. En pratique, un échantillon de cent mouches donnera une très bonne approximation de la vraie proportion ; un échantillon de dix mouches sera généralement peu fiable.

Un échantillon est donc une liste d'observations de variables aléatoires. Une décision statistique consiste à choisir une fonction de ces observations. Dans les exemples précédents, cette fonction était la proportion empirique. À partir d'une liste de cours boursiers, la décision consistera généralement à calculer le cours empirique moyen et la variance empirique de ces cours qui sont fonction des résultats de l'échantillon. Les résultats de la statistique mathématique montrent que certaines de ces fonctions ont de bonnes propriétés et précisent la fiabilité des décisions statistiques qu'elles permettent de prendre en fonction de la taille de l'échantillon. Ainsi, la proportion empirique et la moyenne empirique sont de « bons » estimateurs des paramètres correspondants de la « vraie » distribution. En revanche, la variance empirique n'est pas un bon estimateur de la variance parce qu'elle présente un biais. La question qui se pose est donc : comment choisir un bon estimateur de la variance, c'est-à-dire une fonction des observations qui permette d'estimer la variance de la manière la plus satisfaisante possible ?

La théorie de la décision nous a montré que, pour répondre à cette question, il fallait une définition des conséquences de la décision et de leurs utilités. En statistique, l'utilité des conséquences est appelée la « perte ». C'est, au contraire de ce que nous avons fait jusqu'ici, une valeur à minimiser. En pratique, la perte est généralement définie par le carré de la différence entre la valeur estimée du paramètre et sa vraie valeur, si le paramètre est un nombre (s'il s'agit d'un vecteur de paramètres, c'est le carré de la distance qui définit la perte).

Ainsi, si au vu de l'échantillon X, la décision d(X) est prise, la perte sera $(d(X) - \theta)^2$ si θ est la vraie valeur du paramètre.

Comme l'échantillon est aléatoire, c'est, en accord avec la théorie de l'utilité espérée, l'espérance mathématique de la perte qu'il faudra minimiser. Si θ est la vraie valeur du paramètre, la distribution qui régit les observations sera P^θ, et l'espérance mathématique de la perte sera caculée par rapport à P^θ.

Prenons l'exemple simple d'une proportion inconnue de mâles dans une population de mouches ; θ est cette proportion. À partir de l'échantillon X de taille n, si la décision consiste à prendre la proportion empirique et si le nombre de mâles de l'echantillon est m(X), la décision sera $d(X) = m(X)/n$. La perte sera donc : $L(d/\theta) = [d(X) - \theta]^2 = [m(X)/n - \theta]^2$. La vraie valeur de la proportion étant θ, la probabilité que le nombre de mâles dans l'échantillon soit m(X) est donnée par la distribution binômiale de paramètres n et θ. L'espérance de la perte sera calculée par rapport à cette distribution : $R(d/\theta) = E_{B(n,\ \theta)})\ [L(d/\theta])$. L'espérance de la perte est appelée le risque (risque de prendre la décision d, si θ est la vraie valeur du paramètre) ; comme la perte, il dépend de θ, et c'est une fonction qu'il faut minimiser.

À partir de ces remarques générales, les problèmes de décisions statistiques sont traités de manières différentes selon la théorie dite « classique » et la théorie « bayésienne ».

La *statistique classique* propose un certain nombre de critères permettant de ranger les décisions sur la base de considérations pragmatiques et des (bonnes) propriétés mathématiques des estimations obtenues. Elle doit son label de « classique » à ce que, conformément aux méthodes statistiques du siècle dernier, elle cherche à ne fonder ses conclusions que sur la seule base des résultats observés.

La *statistique bayésienne* se fonde sur la théorie de la décision en situation d'incertitude statistique pour définir un critère.

En statistique classique, l'espace des paramètres n'est pas considéré comme un ensemble probabilisable, les classiques rejetant la notion de probabilités subjectives (ou personnelles, ou ordinales, ou *a priori*). Le critère le plus connu en statistique classique permet de prendre une décision à partir des fonctions de risque, c'est le critère MiniMax (ou critère de Wald, voir chapitre IV) : choisir une décision qui minimise le risque maximal. Les statisticiens classiques utilisant ce critère chercheront donc la valeur de θ pour laquelle le risque $R(d/\theta)$ est maximal — mettons que ce soit un certain θ^o — et ils choisiront la décision d qui minimise $R(d/\theta^o)$.

En statistique bayésienne, l'espace des paramètres est considéré comme probabilisable, la distribution qui sera définie dessus est introduite par le critère représentant les préférences du décideur sur les actes, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent. Le critère est alors le risque bayésien, c'est-à-dire l'espérance du risque par rapport à une distribution subjective sur les paramètres. En pratique, cette distribution sera choisie *a priori* (elle est, de ce fait, souvent appelée distribution *a priori*) sur la base d'informations non statistiques (et, disons-le sans ambages, parmi des distributions qui facilitent les calculs !). Les statisticiens bayésiens choisiront donc la décision qui minimise l'espérance du risque par rapport à la distribution *a priori* : $E_\nu[R(d/\theta)]$ où ν est la distribution *a priori*. En interprétant la perte (à minimiser) comme l'opposé d'une utilité (à maximiser), on reconnaît bien là l'expression du critère défini par la théorie de la décision en situation d'incertitude statistique.

Conclusion

Afin de décider du prix auquel proposer un nouveau produit, les firmes ont tendance à se fonder sur des données que leur propose un service statistique, le facteur d qui affecte le prix dans la fonction de demande : $D = D_0 - dP$, par exemple.

Les statisticiens proposent ces données en résolvant un problème de décision (statistique), face aux résultats d'un échantillon. Ils résolvent ce problème de décisions selon les principes que nous avons vus au paragraphe 2, indépendamment, le plus souvent, de l'utilisateur des résultats qu'ils obtiennent. Ce dernier, s'il ne questionne pas les résultats fournis par le statisticien, résout son problème de décision comme s'il était en situation de risque, c'est-à-dire avec une distribution de probabilité connue sur les aléas qui affectent les conséquences de ses décisions. Mais, quelles que soient les compétences du statisticien et la fiabilité de ses résultats, il peut être important pour le décideur de tenir compte du fait que sa décision n'est pas prise en situation de risque, mais en situation d'incertitude statistique : son comportement face à cette incertitude n'est pas nécessairement le même que celui qu'il aurait face à un jeu de roulette, par exemple. Pour bien faire, il faudrait que le statisticien prenne en compte l'utilité du décideur face à l'incertitude statistique, en l'intégrant au critère qu'il utilise pour estimer les paramètres. Le type de problèmes posés par cette interaction nécessaire entre le statisticien et le décideur qui en utilise les résultats est connu sous le nom de « risque d'estimation » (voir notamment Bawa V., Brown J. et Klein D. [1979]) ; nous ne le mentionnons ici que dans le but d'attirer l'attention sur les précautions à prendre en traitant un problème de décision en situation d'incertitude statistique comme s'il se posait en situation de risque.

VIII / Généralisation des critères et des théories

Si la théorie de l'utilité espérée et son extension au cas de l'incertitude non probabilisée ont clairement dominé le champ des applications de la théorie de la décision des années cinquante aux années quatre-vingt, elles avaient néanmoins subi de violentes critiques dès leur introduction. C'est Maurice Allais qui mit clairement en cause l'axiome d'indépendance de von Neumann et Morgenstern que nous avons vu au chapitre V. Il présenta notamment un exemple, connu depuis sous le nom de paradoxe d'Allais, qui mit les adeptes de la théorie de l'utilité espérée face à des choix où ils contredisaient eux-mêmes l'axiome d'indépendance.

Le paradoxe d'Allais [1953] est fondé sur des exemples dans lesquels le choix entre deux alternatives est proposé, disons A contre B et X contre Y. Ces alternatives sont telles que l'utilité espérée de A est supérieure à celle de B et celle de X à celle de Y quelle que soit l'utilité du décideur. Or, parmi les décideurs confrontés à ces choix, nombreux sont ceux qui préfèrent A à B mais Y à X (ce fut le cas de Savage — et de bien d'autres tenants de la théorie de l'utilité espérée — bien qu'il ait par la suite désavoué son choix et argumenté en faveur du maintien de son axiomatique).

C'est une démarche scientifique courante que de remettre en cause et de généraliser les théories existantes afin de résoudre les paradoxes qu'elles présentent. C'est ainsi que le critère de l'utilité espérée est une généralisation du critère du gain espéré ; il avait été proposé pour résoudre le paradoxe de

Saint-Pétersbourg. La construction de la théorie de la décision par généralisations successives de théories qui résolvent les paradoxes posés par les anciennes s'est naturellement poursuivie. Le terme « paradoxe » doit cependant être entendu ici dans le sens « d'une opinion qui contredit une opinion reçue » (définition du dictionnaire *Robert*) et s'étend donc à toutes les observations de comportements qui contrediraient celui que recommanderait une théorie normative. Il est donc important de signaler, à défaut de les exposer, que, depuis la présentation du paradoxe d'Allais, de nombreuses recherches se sont attachées à construire des expérimentations mettant en évidence les comportements de décideurs. Ces expériences, menées à la fois par des psychologues, des économistes et des statisticiens, ont donné des directions à suivre par les théoriciens de la décision afin de trouver des axiomatiques mieux adaptées aux comportements observés et permettant la construction d'autres critères de décision.

Savage a généralisé la théorie de l'utilité espérée au cas de l'incertitude non probabilisée. Bien qu'il ait été un ardent défenseur de sa théorie, il nous fournit dans son ouvrage (Savage [1954], p. 102) la justification des trente ans de recherches qui ont permis de proposer des théories expliquant les paradoxes que nous exposons ci-dessous : « Si, après une délibération approfondie, quiconque maintient des préférences qui soient en conflit avec le principe de la chose sûre [1], il doit abandonner ou modifier ce principe : car ce type de contradiction semble intolérable dans une théorie normative. »

1. Les paradoxes

Le paradoxe d'Allais

Un exemple simple de comportement en contradiction avec la maximisation d'une utilité espérée est celui d'un décideur, le lecteur peut-être, qui préfère A à B et Y à X, où :

— A est un billet de loterie donnant droit à 15 000 euros avec probabilité 0,09 ou à 0 euro avec probabilité 0,91 ;

— B est un billet de loterie donnant droit à 10 000 euros avec probabilité 0,1 ou à 0 euro avec probabilité 0,9.

1. Ce principe est formalisé par son axiome 2, notamment ; voir chapitre v.

Le paradoxe d'Allais était fondé à l'origine sur un exemple un peu moins simple que celui que nous avons présenté : l'incertitude est engendrée par le tirage au hasard d'une boule qui est dans une urne contenant 100 boules numérotées. On distingue les trois événements : le numéro de la boule tirée est 0, est compris entre 1 et 10, est compris entre 11 et 99.

— X donne droit à 1 000 000 de francs [1] dans tous les cas ;

— Y donne droit à 0 franc dans le premier cas, 50 000 000 de francs dans le deuxième, et 1 000 000 de francs dans le troisième ;

— A donne droit à 1 000 000 de francs dans le premier cas, 1 000 000 de francs dans le deuxième, et 0 franc dans le troisième ;

— B donne droit à 0 franc dans le premier cas, 50 000 000 de francs dans le deuxième, et 0 franc dans le troisième.

Or, le calcul de l'utilité espérée de chacun de ces actes donne pour toute fonction d'utilité U :

$V(X) = U(1\,000\,000)$
$V(Y) = 0{,}01U(0) + 0{,}1U(50\,000\,000) + 0{,}89U(1\,000\,000)$
$V(A) = 0{,}01U(1\,000\,000) + 0{,}1U(1\,000\,000) + 0{,}89U(0)$
$V(B) = 0{,}01U(0) + 0{,}1U(50\,000\,000) + 0{,}89U(0)$

Du fait que la fonction d'utilité peut être normalisée (si U représente les préférences, $aU + b$ les représente aussi), posons $U(0) = 0$ et $U(50\,000\,000) = 1$.

Si A est préféré à B, on doit avoir : $V(A) > V(B)$ soit $0{,}11U(1\,000\,000) > 0{,}1$, ce qui implique $U(1\,000\,000) > 1/11$.

Or, puisque Y est préféré à X, on doit aussi avoir : $V(Y) > V(X)$, soit $0{,}1 + 0{,}89U(1\,000\,000) > U(1\,000\,000)$, ce qui implique : $0{,}11U(1\,000\,000) < 0{,}1$, soit $U(1\,000\,000) < 1/11$, d'où la contradiction.

1. La monnaie française était alors le franc.

Nombreux sont ceux qui préfèrent A à B parce que 0,09 est quasi égal à 0,1 alors que 15 000 est sensiblement supérieur à 10 000.

— X est un billet de loterie donnant droit à 15 000 euros avec probabilité 0,9 ou à 0 euro avec probabilité 0,9 ;

— Y est un billet qui vaut 10 000 euros (avec certitude).

Nombreux sont ceux qui préfèrent Y à X, parce que Y est un gain certain alors que X peut, quoique avec une probabilité faible, ne rien faire gagner.

En quoi préférer A à B et Y à X est-il contradictoire avec l'axiome d'indépendance ? Rappelons cet axiome que nous avions noté A_2 au chapitre v :

A_2 : Étant donné deux loteries l et l' telles que l est préférée à l', et un nombre t compris entre 0 et 1, pour toute troisième loterie l'', la loterie composée tl + (1 – t)l'' doit être préférée à tl' + (1 – t)l''.

Puisque Y est préféré à X, considérons un billet de loterie qui donne droit au billet Y avec probabilité 0,1 et 0 avec

probabilité 0,9 : c'est $tl + (1 - t)l''$, où l = Y, t = 0,1 et l'' = 0 avec certitude. En vertu de l'axiome d'indépendance, ce billet de loterie doit être préféré à $tl' + (1 - t)l''$ où l' = X, c'est-à-dire qu'il doit être préféré au billet de loterie qui donne droit au billet X avec probabilité 0,1 et 0 avec probabilité 0,9. Or, le premier billet donne droit à 10 000 euros avec probabilité 0,1 ou à 0 euro avec probabilité 0,9 : il est équivalent au billet B. Le second billet donne droit à 15 000 euros avec probabilité 0,09 ou à 0 euro avec probabilité 0,91 : il est équivalent au billet A qui était pourtant préféré à B.
Ce paradoxe a conduit certains chercheurs à essayer d'affaiblir l'axiome d'indépendance et à chercher une théorie plus générale que celle de l'utilité espérée.

Le paradoxe d'Ellsberg

Le paradoxe précédent mettait en évidence le rôle de l'axiome d'indépendance dans les situations de risque (les probabilités étaient données). L'exemple proposé par Ellsberg [1961] utilise à la fois des probabilités données et des probabilités inconnues ; il traite donc d'une situation d'incertitude plus générale. Cette incertitude est engendrée par le tirage de boules de couleurs, rouges, blanches ou noires, d'une urne contenant 90 boules, dont 30 sont rouges. Le nombre de boules noires est inconnu et celui de boules blanches aussi, on sait seulement que leur somme est 60. L'acte E est à comparer à l'acte F, l'acte G à l'acte H ; ils sont définis par le tableau suivant où les sommes indiquées sont les conséquences de chaque acte selon la couleur de la boule tirée :

États / *Actes*	*Rouges*	*Blanches*	*Noires*
E	100	0	0
F	0	100	0
G	100	0	100
G	0	100	100

Certains décideurs préfèrent E à F et H à G. Supposons que les préférences d'un tel décideur soient représentées par une utilité espérée fondée sur des probabilités subjectives. Ces probabilités sont : P(Rouge) = 1/3, elle est connue et donc objective ; P(Blanche) et P(Noire) qui ne sont pas connues de manière objective. On sait seulement qu'elles ne peuvent être 1/2 car la somme des trois ne serait pas 1 ; elles sont comprises entre 0 et 2/3.

L'ordre de préférence implique :

— puisque E est préféré à F, comme l'utilité espérée de E est 100 × P(Rouge) et que celle de F est 100 × P(Blanche), on doit avoir : P(Rouge) ≥ P(Blanche) ;

— puisque H est préférée à G, comme l'utilité espérée de H est 100 × P(Blanche) + 100 × P(Noire) et que celle de G est 100 × P(Rouge) + 100 × P(Noire), on doit avoir : P(Blanche) + P(Noire) ≥ P(Rouge) + P(Noire).

Mais cela implique que P(Blanche) ≥ P(Noire), ce qui contredit le fait que E soit préférée à F !

Par ce paradoxe, c'est le principe de la « chose sûre » appliqué à une situation d'incertitude (et non plus seulement de risque) qui est remis en cause. La mesure de la vraisemblance des événements par une probabilité (c'est-à-dire une mesure additive au sens où la probabilité de la réunion de deux ensembles disjoints est la somme de leurs probabilités) n'est sans doute pas celle qui est adaptée à des situations comme celle de l'exemple. Les recherches récentes ont donc porté sur la généralisation de la théorie de Savage en pondérant autrement que par des probabilités les événements pertinents dans un problème de décision.

2. Les généralisations

Maurice Allais, en présentant son paradoxe, montrait la limite normative de la théorie de l'utilité espérée. Il donnait en même temps des arguments en faveur d'un critère différent. Le critère proposé suppose l'existence d'une utilité cardinale [2] sur les conséquences, utilité indépendante de toute situation de risque. Rappelons qu'au contraire, dans la théorie de l'utilité espérée, la cardinalité de l'utilité sur les conséquences découle des axiomes. L'argument en faveur de cette hypothèse est que l'utilité des conséquences devrait être définie en dehors de tout

2. C'est-à-dire que si x_2 est préférée à x_1, l'accroissement $U(x_2) - U(x_1)$ représente l'accroissement de préférence entre x_1 et x_2.

contexte de décision dans le risque, alors que, dans la théorie de l'utilité espérée, elle n'est qu'un cas particulier de l'utilité d'une loterie (l'utilité de von Neumann-Morgenstern est un cas particulier de l'index de Bernoulli). Une seconde hypothèse pour définir ce critère est que l'utilité d'une loterie est une fonction linéaire de l'utilité des conséquences. L'index de Bernoulli a aussi cette propriété, mais elle découle des axiomes. Le critère que proposait Allais, sans justification axiomatique sur le comportement, est défini ainsi : si l est une loterie qui met les probabilités $p_1, \ldots, p_n$ sur les conséquences $x_1, \ldots, x_n$ rangées par ordre de préférences décroissantes, son utilité est : $V(l) = U(x_1) + q(p_2 + p_3 + \ldots p_n) [U(x_2) - U(x_1)] + \ldots + q(p_n) [U(x_n) - U(x_{n-1})]$.

Dans ce critère, ce sont les accroissements d'utilité entre les conséquences qui sont pondérées par une fonction (notée q dans la formule) des probabilités cumulées. L'utilité des conséquences U est déterminée indépendamment de tout choix dans l'incertain et ne peut donc être considérée comme représentant le comportement de l'agent vis-à-vis du risque. En revanche, l'aversion pour le risque est caractérisée par les coefficients q(p) qui sont fonction des probabilités. Avec ce critère, Allais peut expliquer le comportement d'agents qui étaient en contradiction avec celui de l'utilité espérée.

Il a cependant fallu près de trente ans de recherches [3] pour justifier ce critère et les idées qu'il suggère, par une théorie axiomatique du comportement. Pendant cette période, de nombreuses études expérimentales, tant en psychologie qu'en économie et en théorie de la décision, ont permis de mieux cerner certains aspects du comportement des décideurs. Parmi les éléments notables, nous pouvons retenir la tendance à surestimer les petites probabilités : le seul fait que la probabilité d'une conséquence ne soit pas nulle fait que le décideur tient compte de cette conséquence, même si cette probabilité est infinitésimale (gagner au Loto !). Une telle tendance ne peut être prise en compte par une théorie qui ne fait intervenir que les probabilités sans tenir compte de déformations que les décideurs peuvent leur faire subir.

La violation systématique de certains axiomes, comme le montrent les paradoxes d'Allais ou d'Ellsberg, a été mise en lumière par des expériences qui ont permis de chercher des

---

3. Un panorama de ces recherches se trouvera notamment dans : ALLAIS et HAGEN [1979], DABONI, MONTESANO et LINES [1986] et MUNIER [1988].

affaiblissements pertinents de ces axiomes. Le critère d'Allais a pu être justifié axiomatiquement en remplaçant l'axiome d'indépendance par un axiome plus faible. Bien entendu, V n'est alors plus une fonction linéaire des probabilités (ce n'est plus une espérance mathématique) : la formule précédente fait intervenir une déformation des probabilités (par la fonction q). Les théories axiomatiques justifiant le critère précédent ou des critères semblables (en ce sens que ce ne sont pas des utilités espérées, mais une formule faisant intervenir des déformations des probabilités) sont apparues simultanément depuis 1979 ; elles sont nombreuses et ce n'est pas notre propos d'en rendre compte ici autrement que par des références bibliographiques nécessairement très incomplètes :

— les premiers à reprendre les idées d'Allais furent Kahneman et Tversky [1979], qui proposèrent un critère de décision dans le risque dans lequel les conséquences sont évaluées par une utilité et les probabilités sont déformées par une fonction. Leur critère a la faiblesse de ne pas respecter la dominance stochastique ;

— traitant de situations de risque, Quiggin [1982] semble avoir proposé la première axiomatique de ce qu'il a appelé « théorie de l'utilité anticipée » qui justifie un critère généralisant celui d'Allais. D'autres théories d'Allais [1985] et de Yaari [1987], notamment, développent des représentations du comportement en situations de risque sous la forme d'une fonction non linéaire des probabilités ;

— dans le même esprit, le comportement en situation d'incertitude peut être représenté par une fonction qui n'est pas linéaire (si l'axiome d'indépendance et l'axiome de la « chose sûre » de Savage ne sont pas vérifiés). En prenant d'autres affaiblissements des axiomes, la valeur d'un acte sera exprimée par une fonctionnelle définie par une mesure subjective qui n'est pas une probabilité, mais une mesure non additive seulement [4]. Ce sont notamment les théories de Schmeidler [1989], de Gilboa et Schmeidler [1990] et de Wakker [1989].

Sans entrer dans les détails, mais pour avoir une vue d'ensemble des différentes théories et de leurs rapports, le tableau suivant peut être établi :

---

4. C'est-à-dire qu'elle ne respecte que l'ordre de l'inclusion, si $A \supseteq B$, la mesure de A sera supérieure à celle de B. En revanche, elle ne respecte pas l'additivité : $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$.

Espérance subjective → du gain	Espérance subjective → de l'utilité	Intégration subjective non linéaire de l'utilité
↑	↑	↑
Espérance du gain →	Espérance de l'utilité →	Intégration non linéaire de l'utilité

Dans le tableau, les flèches indiquent le sens d'une généralisation et la première ligne correspond aux situations d'incertitude non probabilisées, la seconde aux situations de risque. Le tableau met en évidence la place centrale de la théorie de l'utilité espérée ; il fait apparaître aussi son manque de généralité.

Les théories récentes, puisque plus générales, doivent donner lieu à des notions de mesure du risque qui ont des applications en théorie de l'assurance ou en théorie du portefeuille. Elles doivent aussi être utilisées pour proposer de nouvelles formulations de modèles économiques où elles serviront de fondement à la représentation du comportement rationnel. Ces nouvelles théories et leurs applications à venir ne diminuent pas l'importance que la théorie de l'utilité espérée a prise dans le développement de la science économique. Tout en rejetant l'axiome d'indépendance, Mark Machina [1982] a pu montrer dans un modèle que de nombreux résultats qui utilisent cette théorie sont robustes, localement, si cet axiome n'est pas utilisé. En la résumant très grossièrement, son analyse montre que la propriété de linéarité que donne l'axiome d'indépendance n'est pas nécessaire pour obtenir les résultats que l'on en dérive, puisqu'ils restent, localement, approximativement valables.

Conclusion

La prépondérance d'une théorie ne signifie pas qu'elle doive être imposée par un académisme quasi dogmatique. Il revient à Maurice Allais d'avoir su reconnaître les limites de la théorie de l'utilité espérée dès son apparition et d'avoir lutté contre ce qu'il a appelé l'impérialisme de l'école américaine et la tendance à ne pas remettre en cause les axiomes qui sont à la base de cette théorie. À cause de l'immobilisme des universitaires et plus encore des praticiens, les généralisations de la théorie de l'utilité espérée ont attendu trente ans pour voir le jour.

Cependant, et grâce à cela, de nombreuses applications à la théorie économique de l'incertain ont pu être développées dans des domaines où la validité de cette théorie est reconnue : théorie de l'information, de l'assurance, des marchés financiers, notamment. Pour traiter des paradoxes qui surgissent et des situations où les axiomes de la théorie sont généralement violés par les décideurs, il aura fallu développer les généralisations que nous avons présentées dans ce chapitre. À leur tour, ces théories devront être généralisées ou céder la place à des théories alternatives lorsque leurs applications auront été développées et auront montré les limites de leurs pouvoirs explicatifs et prédictifs.

Conclusion générale

Comment une théorie générale de la décision individuelle peut-elle être adaptable à tous les problèmes ? Chaque problème que nous rencontrons présente des particularités qui semblent requérir une approche différente. Nous avons pourtant pu voir que de nombreux éléments communs se retrouvent dès que nous formalisons les problèmes de décision. Il n'en reste pas moins que des situations différentes doivent être traitées de manière adaptée et nous avons fait quelques distinctions entre plusieurs types d'incertitude pertinents. L'incertitude est perçue d'une manière individuelle par les décideurs. La théorie ne consiste pas à réduire les individus à des machines, au contraire, sa construction logique, ses axiomes permettent à chacun de savoir si la théorie correspond ou non à son comportement. Dans le cadre d'une représentation des préférences d'un décideur, comme le critère de l'utilité espérée, chaque décideur garde la faculté de déterminer des paramètres qui lui sont propres, comme son degré d'aversion pour le risque.

Toutes les théories ont leurs limites ; les exemples où une théorie ne correspond pas à la réalité de comportements observés n'invalident pas la théorie : ils suggèrent qu'elle doit être étendue, généralisée ou révisée pour rendre compte des observations. La théorie de la décision ne s'est pas construite autrement : les paradoxes ont suggéré que de nouveaux critères, fondés sur des axiomes différents, soient proposés aux décideurs dont les comportements ne sont pas correctement représentés par la théorie existante. De ce fait, la théorie de la décision n'est pas achevée et ne le sera sans doute jamais puisqu'elle se développe au fur et à mesure des besoins de l'analyse des problèmes de décision. En l'état actuel, elle sert de référence à la représentation du comportement d'agents économiques qui sont cohérents avec ses hypothèses, ce qui a permis des avancées importantes dans la compréhension de phénomènes économiques. Les choix industriels, les choix d'investissements, l'évaluation de contrats d'assurance et de titres financiers sont des exemples des applications de cette théorie. Les problèmes d'organisation industrielle ont pris une place prépondérante dans les sciences économiques depuis les années quatre-vingt, cela grâce au renouveau de l'intérêt porté à la théorie des jeux. Nous lui consacrons quelques lignes.

L'étude de ces jeux a intéressé des mathématiciens et des philosophes comme Pascal, Bernoulli ou Borel. Von Neumann et Morgenstern ont poursuivi cette démarche et ils posèrent les fondements de la théorie qui peut s'appliquer à des problèmes de décision en situations de conflit plus générales que celles des jeux de société. Un jeu y est défini par l'ensemble des joueurs, les choix qui leur sont possibles et les conséquences de ces choix : gains ou pertes, généralement exprimés en termes de paiements (positifs ou négatifs). Afin de développer l'analyse des jeux, il était nécessaire de formaliser les manières de faire un choix individuel. C'est l'objet de la théorie de la représentation du comportement individuel de von Neumann et Morgenstern, la théorie de l'utilité espérée que nous avons vue au chapitre V. Les concepts de solution d'un jeu sont fondés sur l'hypothèse que les gains des joueurs sont des valeurs qu'ils cherchent à maximiser et que ce sont donc, en fait, les utilités des conséquences de leurs décisions ou les utilités espérées de leurs stratégies.

La théorie des jeux distingue les jeux non coopératifs, dans lesquels aucune collusion n'est possible entre les joueurs (on dit encore jeux purement compétitifs ou concurrentiels), des jeux coopératifs où, au contraire, certaines formes de coopération sont possibles.

La solution à un problème de décision dans un jeu non coopératif est donnée par une notion d'équilibre. Un équilibre de Nash (du nom de celui qui l'a étudié le premier et en a démontré un théorème d'existence [1951]) est une liste des gains des joueurs (c'est-à-dire une case du tableau de la forme normale du jeu) qui correspond à *une liste de stratégies pour chaque joueur telles qu'aucun changement unilatéral de* *stratégie par l'un des joueurs ne lui permettrait d'augmenter son gain.*

Une solution non coopérative n'est pas nécessairement satisfaisante. Deux entreprises en concurrence peuvent adopter chacune soit une stratégie agressive se traduisant par le déclenchement de manœuvres de conquête du marché, soit une stratégie préservant le *statu quo* ou cherchant à l'améliorer pour les deux parties.

Le choix du lieu d'implantation d'un point de vente par des entreprises concurrentes est un autre exemple où l'absence de coopération peut se traduire par des conséquences désastreuses pour tous les concurrents.

Le rachat de parts du capital d'une société, l'enjeu étant le contrôle de la société, est un exemple où l'absence de consensus entre les acheteurs peut les amener à acheter très cher des parts dont le nombre restera insuffisant.

Ces exemples peuvent être traduits sous une forme voisine de celle du classique dilemme du prisonnier : deux malfaiteurs ont été arrêtés pour une faute bénigne et ils sont soupçonnés, à juste titre mais sans preuve, d'être les auteurs d'un crime grave. Le juge essaie de les faire avouer tous deux pour les condamner à cinq ans chacun, faute de quoi il les condamnera à un an chacun pour la faute bénigne. Mais il leur propose individuellement de relaxer celui qui témoignerait contre l'autre, ce dernier « écopant » alors de vingt ans. La forme normale de ce jeu est représentée par le tableau suivant :

I \ *II*	*Ne parle pas*	*Parle*
Ne parle pas	1, 1	20, 0
Parle	0, 20	5, 5

Si les joueurs pouvaient coopérer, aucun ne parlerait mais, s'ils agissent indépendamment l'un de l'autre, ils parleront tous deux. On voit que, dans ce jeu, la coordination des deux joueurs leur assure un gain meilleur que celui qu'ils peuvent s'assurer individuellement.

Pour les jeux coopératifs, le concept d'équilibre de Nash n'est pas un concept d'équilibre satisfaisant, comme on le voit dans le dilemme du prisonnier où le point d'équilibre est (parle,

parle) ce qui correspond à un résultat qui est moins bon pour chacun des deux joueurs que la solution (ne parle pas, ne parle pas).

Un autre exemple classique argumentant contre l'équilibre de Nash comme concept de solution pour les jeux où la coopération est possible est celui de la bataille des sexes : « Lui » préfère aller au match, « Elle » au ballet, mais tous deux préfèrent par-dessus tout sortir ensemble. La forme normale du jeu, où les gains sont des utilités, peut être représentée de la manière suivante :

Lui \ *Elle*	Match	Ballet
Match	2, 1	0, 0
Ballet	0, 0	1, 2

Ce type de situation se présente dans de nombreux problèmes de gestion comme celui de l'attribution de postes de travail ou de responsabilités, les préférences des deux amants étant remplacées par les capacités des agents. Lorsque ces capacités sont volontairement tenues cachées par les agents, l'analyse de leurs stratégies peut permettre de dévoiler ces capacités.

La théorie des jeux propose des méthodes d'analyse des interactions entre individus. La théorie de la décision qui a été présentée dans cet ouvrage porte sur le comportement de ces individus, indépendamment des perceptions qu'ils peuvent avoir des réactions des autres. Comme nous l'avons dit plus haut, la théorie des jeux avait besoin de la théorie de la décision individuelle pour se bâtir et ce sont les initiateurs de la première qui ont établi les principes de la seconde. Celle-ci, à son tour, a permis le développement de théories économiques fondées sur des modèles mathématiques, des méthodes de gestion, des outils d'analyse qui trouvent des applications en dehors du champ de l'économie et de la gestion. La tentation est grande, et ceux qui y cèdent sont nombreux, de vouloir utiliser cette théorie au-delà de ses limites. En particulier, les décisions publiques ne relèvent pas du domaine de la décision individuelle, en général, comme le montre le théorème d'impossibilité de Arrow (chapitre VI, paragraphe 6). On peut toutefois avoir recours à cette théorie pour les décisions collectives si celles-ci sont prises par un seul individu délégué, quelqu'un qui « dicte » les décisions à prendre. La théorie de la décision individuelle peut aussi être invoquée lorsque, une organisation ayant par le passé pris de nombreuses décisions, il est possible d'établir sur la base de ces données les paramètres définissant un critère. Ce critère ne prétend pas représenter des préférences collectives, mais il est tel que les décisions prises par le passé l'optimisent. Dans la mesure où l'organisation continuera de fonctionner selon les mêmes principes, un problème de décision pourra être analysé dans le cadre de LA théorie de la décision.

Repères bibliographiques

Bibliographie générale

De Groot H., *Optimal Statistical Decisions*, Mc Graw Hill, New York, 1970.

Eeckhoudt L. et Gollier C., *Les Risques financiers*, Édiscience, 1992.

Ferrari J.-B., *Économie du risque*, Breal, 2002.

Fishburn P., *Les Mathématiques de la décision*, Gauthier-Villars, Paris, 1973.

Gayant J.-P., *Risque et décision*, Vuibert, 2001.

Henriot D. et Rochet J.-C., *Microéconomie de l'assurance*, Economica, 1991.

Kast R., *Rationalité et marchés financiers*, Economica, 1991.

Raiffa R., *Analyse de la décision*, Dunod, Paris, 1973.

Vincke Ph., *L'Aide multicritère à la décision*, Ellipses, Paris, 1989.

Références bibliographiques

Allais M., « Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : critique des postulats et axiomes de l'école américaine », *Econometrica*, 21, p. 503-546, 1953.

Allais M., « Three Theorems on the Theory of Cardinal Utility and Random Choice », *in Essays in Honour of Werner Leinfellner*, H. Berghel ed, Reidel, Dordrecht, 1985.

Allais M. et Hagen O., *Expected Utility and the Allais Paradox*, Reidel, 1979.

Anscombe F. et Aumann R., « A Definition of Subjective Probability », *Annals of Mathematical Statistics*, nº 34, mars 1963.

Arrow K.J., « The Theory of Risk Aversion », *in Aspects of the Theory of Risk Bearing*, Yrjö Foundation, Helsinki, 1965.

Bawa V., Brown J. et Klein D., *Estimation Risk and Optimal Portfolio Choice*, North Holland, Amsterdam, 1979.

Blackwell D., « Equivalent Comparison of Experiments », *Annals of Mathematical Statistics*, 24, 1953, p. 265-272.

BERNOULLI D., « Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis », *Commentarii academiae scientiarum imperialis petropolitanae*, 5, 1738.

DABONI, MONTESANO et LINES, *Recent Developments in the Foundations of Utility and Risk Theory*, Reidel, 1986.

DEBREU G., « Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function », *in Decision Processes*, Thrall, Comb, Davis eds, Wiley, New York, 1970.

DE FINETTI B., « Fondamenti logici del raggionamento probabilistico », *Bolettino dell'unione matematica italiana*, nº 9, décembre 1930. Voir aussi : *Teoria delle probabilita. Sintesi introduttiva con appendice critica*, Einaudi, Torino, 1970.

ELLSBERG D., « Risk, Ambiguity and the Savage Axioms », *Quaterly Journal of Economics*, vol. 75, 1961, p. 643, 669.

GILBOA I. et SCHMEIDLER D., « Additive Representations of Non-Additive Measures and the Choquet Integral », miméo, Department of Economics, Ohio State University, 1990.

KAHNEMAN D. et TVERSKY A., « Prospect Theory : an Analysis of Decision Under Risk », *Econometrica*, 47, nº 2, 1979, p. 263-291.

KEENEY R. et RAIFFA H., *Decisions with Multiple Objectives : Preferences and Value Trade-Offs*, J. Wiley and Sons, New York, 1976.

KEYNES J.M., *A Treatise on Probability*, Mc Millan, Londres, 1921.

LUCE R. et RAIFFA H., *Games and Decisions*, Wiley and Sons, New York, 1957.

MARKOWITZ H., *Portfolio Selection of Investments*, Cowles Foundation, Yale University Press, 1970.

MUNIER B., *Risk, Decision and Rationality*, Reidel, 1988.

PRATT J., « Risk Aversion in the Small and in the Large », *Econometrica*, 32, 1964, p. 122-136.

QUIGGIN J., « A Theory of Anticipated Utility », *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3, nº 4, 1982, p. 323-343.

RAIFFA R., *Decision Analysis*, 1970 ; trad. : *Analyse de la décision*, Dunod, Paris, 1973.

RAMSEY F.P., « Truth and Probability », 1926, *in The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, édité par R.B. BRAITHWAITE, New York, Humanities Press, 1931, 1950.

ROY B., *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*, Economica, Paris, 1985.

SAVAGE L.J., *The Foundations of Statistics*, J. Wiley and Sons, New York, 1954.

SCHMEIDLER D., « Subjective Probability and Expected Utility Without Additivity », *Econometrica*, 57, 1989, p. 571-587.

VINCKE Ph., *L'Aide multicritère à la décision*, Ellipses, Paris, 1989.

VON NEUMANN J. et MORGENSTERN O., *Theory of Games*

and Economic Behavior, Princeton University Press, 1944.
WALD A., *Statistical Decision Functions*, Wiley and Sons, New York, 1950.
WAKKER P, *Additives Representations of Preferences, a New Foundation of Decision Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.
YAARI M.E., « Dual Theory of Choice Under Uncertainty », *Econometrica*, 55, nº 1, 1987, p. 95-115.

Table

Collection

R E P È R E S

dirigée par
Jean-Paul Piriou

avec Bernard Colasse, Pascal Combemale, Françoise Dreyfus, Hervé Hamon, Dominique Merllié *et* Christophe Prochasson

Dictionnaires

R E P È R E S

Guides

R E P È R E S

Manuels

R E P È R E S

Composition Facompo, Lisieux (Calvados)
Achevé d'imprimer en juin 2002 sur les presses
de l'imprimerie Campin, Tournai (Belgique)
Dépôt légal : juin 2002